

Définition du PGCD

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

On appelle **PGCD** de a et b le plus **grand commun diviseur de a et b** et note **$\text{PGCD}(a ; b)$** .

On peut étendre cette définition à des **entiers relatifs**. Ainsi dans le cas d'entiers négatifs, la recherche du PGCD se ramène au cas positif. Par exemple, $\text{PGCD}(-60;100) = \text{PGCD}(60,100)$.

On a ainsi de façon général : $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(|a| ; |b|)$

$$\text{PGCD}(a ; 0) = a$$

$$\text{PGCD}(a ; 1) = 1$$

$$\text{Si } b \text{ divise } a \text{ alors } \text{PGCD}(a ; b) = b$$

Lemme d'Euclide et propriétés

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Soit r est le reste de la division euclidienne de a par b .

$$\text{On a : } \text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; r)$$

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

L'ensemble des diviseurs communs de a et b est l'ensemble des diviseurs de leur PGCD.

Exemple :

Chercher les diviseurs communs de 2730 et 5610 revient à chercher les diviseurs de leur PGCD. A l'aide de la calculatrice, on obtient : $\text{PGCD}(2730 ; 5610) = 30$. Les diviseurs de 30 sont 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 et 30. Donc les diviseurs communs à 2730 et 5610 sont 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 et 30.

Soit a , b et k des entiers naturels non nuls.

$$\text{PGCD}(ka ; kb) = k \times \text{PGCD}(a ; b)$$

Nombres premiers entre eux

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

On dit que a et b sont **premiers entre eux** lorsque **leur PGCD est égal à 1**.

Exemple :

42 et 55 sont premiers entre eux en effet $\text{PGCD}(42 ; 55) = 1$.

Théorème de Bézout

Soit a et b deux entiers naturels non nuls et d leur PGCD.

Il existe deux entiers relatifs u et v tels que **$au + bv = d$** .

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Théorème de Gauss

Soit a , b et c trois entiers naturels non nuls.

Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux alors a divise c .

Corollaire :

Soit a , b et c trois entiers naturels non nuls.

Si a et b divise c et si a et b sont premiers entre eux alors ab divise c .

Exemple :

6 et 11 divisent 660,

6 et 11 sont premiers entre eux,

donc 66 divise 660.