

EXERCICES

Loi binomiale

Exercice 1.

Dans une entreprise, un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel de gestion a été suivi par 25 % du personnel. On choisit dix personnes dans l'entreprise, qui possède un effectif suffisamment grand pour assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note X le nombre de personnes choisies qui ont suivi le stage.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.
2. Calculer $P(X = 3)$. Que représente ce nombre ?
3. Calculer la probabilité que quatre personnes au plus parmi les dix choisies aient suivi le stage.
4. Calculer la probabilité qu'au moins cinq personnes parmi les dix choisies aient suivi le stage.

Exercice 1.

1. On répète dix fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « la personne a suivi le stage ») de paramètre $p = 0,25$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0,25$. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,25)$.

2.

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \times (0,25)^3 \times (0,75)^7 \approx 0,250.$$

La probabilité que sur les dix personnes choisies il y en ait exactement trois qui aient suivi le stage est d'environ 0,250.

3. $P(X \leq 4) \approx 0,922$.
4. $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) \approx 0,0781$.

Exercice 2.

Le daltonisme est une anomalie de la vision affectant la perception des couleurs. La fréquence du daltonisme en France est de 8,5 % pour les hommes et de 0,4 % pour les femmes. On considère que la taille de la population française est suffisamment grande pour que le choix de personnes puisse être assimilé à un tirage avec remise.

1. On choisit au hasard 20 hommes dans la population française. Quelle est la probabilité d'obtenir deux daltoniens ?
2. On choisit au hasard 20 femmes dans la population française. Quelle est la probabilité d'obtenir deux daltoniennes ?

Exercice 2.

1. On répète vingt fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « la personne choisie est daltonienne ») de paramètre $p = 0,085$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 20$ et $p = 0,085$. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0,085)$.

$$P(X = 2) = \binom{20}{2} \times (0,085)^2 \times (0,915)^{18} \approx 0,277.$$

2. On répète vingt fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « la personne choisie est daltonienne ») de paramètre $p = 0,004$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 20$ et $p = 0,004$. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0,004)$.

$$P(X = 2) = \binom{20}{2} \times (0,004)^2 \times (0,996)^{18} \approx 0,003.$$

Exercice 3.

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 35$ et $p = 0,71$. Calculer, à 10^{-3} près, les probabilités suivantes :

1. $P(X = 25)$
2. $P(X \leq 30)$
3. $P(X < 20)$
4. $P(X > 21)$
5. $P(X \geq 12)$

Exercice 3.

1. $P(X = 25) \approx 0,148$.
2. $P(X \leq 30) \approx 0,987$.
3. $P(X < 20) = P(X \leq 19) \approx 0,026$.
4. $P(X > 21) = 1 - P(X \leq 21) \approx 0,892$.
5. $P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) \approx 1$.

Exercice 4.

X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale telle que :

$$P(X = 5) = \binom{17}{5} \times 0,2^5 \times 0,8^{12}.$$

- Inventer un énoncé de situation faisant intervenir cette variable aléatoire.

Exercice 4.

20 % des Français déclarent pratiquer du sport régulièrement. On considère que la taille de la population française est suffisamment grande pour que le choix de personnes puisse être assimilé à un tirage avec remise. On choisit au hasard 17 personnes dans la population française. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement cinq personnes pratiquant du sport régulièrement?

Exercice 5.

Un service après-vente dispose d'équipes de dépannage qui interviennent auprès de la clientèle sur appel téléphonique. Les appels se produisent de façon indépendante et la probabilité qu'un retard se produise pour le dépannage à la suite d'un appel est $p = 0,25$. Un même client a appelé le service à huit dates différentes. Soit X le nombre de retards que ce client a subis.

1. Définir la loi de probabilité de X .
2. Calculer les probabilités des événements :
 - a. A : « le client a subi au moins un retard »;
 - b. B : « le client a quatre retards ou moins ».

Exercice 5.

- On répète huit fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « le client a subi un retard ») de paramètre $p = 0,25$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 8$ et $p = 0,25$. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(8; 0,25)$.
- $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0,900$.
 - $P(X \leq 4) \approx 0,973$.

Exercice 6.

Une élève répond au hasard et indépendamment à chacune des dix questions d'un QCM. Pour chaque question, il y a trois propositions dont une seule est correcte. Soit X le nombre de bonnes réponses obtenues par l'élève.

- Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
- Calculer la probabilité que l'élève obtienne exactement une bonne réponse.
- Recopier puis compléter le tableau suivant à 10^{-3} près.

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	0,017		0,195		0,228	
k	6	7	8	9	10	
$P(X = k)$	0,057	0,016	0,003	0	0	

- Chaque bonne réponse rapportant un point, quelle est la probabilité que l'élève ait au moins la moyenne?
- Combien faudrait-il de questions pour que la probabilité que l'élève obtienne au moins une bonne réponse dépasse 99 %?

Exercice 6.

- On répète 10 fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « l'élève répond correctement ») de paramètre $p = \frac{1}{3}$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{3}$. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; \frac{1}{3})$.

2.

$$P(X = 1) = \binom{10}{1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^9 \approx 0,087.$$

3.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = k)$	0.017	0.087	0.195	0.260	0.228	0.137	0.057	0.016	0.003	0	0

4.

$$P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = 0,213.$$

- $P(X \geq 1) > 0,99 \iff 1 - P(X = 0) > 0,99 \iff P(X = 0) < 0,01 \iff \left(\frac{2}{3}\right)^n < 0,01$. Or, $\left(\frac{2}{3}\right)^{11} \approx 0,012$ et $\left(\frac{2}{3}\right)^{12} \approx 0,0078$. Il faudrait au moins 12 questions pour que la probabilité que l'élève obtienne au moins une bonne réponse dépasse 99 %.

Exercice 7.

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs. On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique. On note S l'événement « le voyageur fait sonner le portique » et M l'événement « le voyageur porte un objet métallique ». On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

On admet que : – lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98; – lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à 0,98.

Partie A

1. À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $P(M)$, $P_M(S)$ et $P_{\overline{M}}(\overline{S})$.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3. Montrer que $P(S) = 0,02192$.
4. En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique. On arrondira le résultat à 10^{-3} .

Partie B

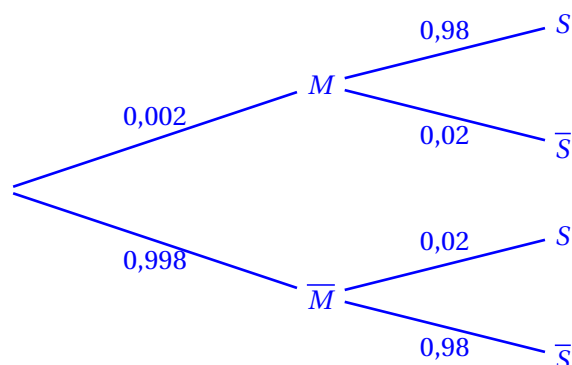
80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que, pour chaque personne, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,02192. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique parmi les 80 personnes de ce groupe.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.
3. Sans justifier, donner la valeur arrondie à 10^{-3} de :
 - a. la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique;
 - b. la probabilité qu'au maximum cinq personnes fassent sonner le portique.
4.
 - a. Donner la valeur du plus petit entier k tel que $P(X \leq k) \geq 0,9$.
 - b. Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 7.

Partie A

1. D'après l'énoncé, $P(M) = \frac{1}{500} = 0,002$, $P_M(S) = 0,98$ et $P_{\overline{M}}(\overline{S}) = 0,98$.
2. Arbre :



3.
$$\begin{aligned} P(S) &= P(S \cap M) + P(S \cap \overline{M}) \\ &= P(M) \times P_M(S) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(S) \\ &= 0,002 \times 0,98 + 0,998 \times 0,02 \\ &= 0,02192. \end{aligned}$$

4.
$$P_S(M) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{0,002 \times 0,98}{0,02192} = \frac{49}{548} \approx 0,089.$$

Partie B

1. On répète 80 fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « la personne fait sonner le portique ») de paramètre $p = 0,02192$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 80$ et $p = 0,02192$.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(80; 0,02192)$.

2. $E(X) = 80 \times 0,02192 = 1,7536$.

En moyenne, sur 80 passages, le portique sonne environ 1,75 fois.

3.
 - a. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \simeq 0,830$.
 - b. $P(X \leq 5) \simeq 0,992$.
4.
 - a. $P(X \leq 2) \simeq 0,7$ et $P(X \leq 3) = 0,9008 > 0,9$, donc le plus petit entier cherché est $n = 3$.
 - b. La probabilité qu'il y ait au plus 3 personnes qui fassent sonner le portique est supérieure à 90 %.

Exercice 8.

Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,4$.

1. Calculer $P(X = 23)$ et $P(X \leq 12)$.
2. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de X .

Exercice 8.

1. $P(X = 23) \approx 0,078$. $P(X \leq 12) \approx 0,013$.
2. $E(X) = 50 \times 0,4 = 20$; $V(X) = 50 \times 0,4 \times 0,6 = 12$; $\sigma(X) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3,464$.

Exercice 9.

Clara dispose de 20 fléchettes. À chaque lancer, elle a une probabilité égale à 0,1 de tirer au centre de la cible. On suppose les lancers indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fléchettes que Clara a mises au centre de la cible.

1. Donner la loi de probabilité de X .
2. Calculer la probabilité que Clara mette au plus une fléchette au centre de la cible.
3. Calculer l'espérance de X .

Exercice 9.

1. On répète 20 fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « la fléchette atteint le centre de la cible ») de paramètre $p = 0,1$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 20$ et $p = 0,1$. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0,1)$.
2. $P(X \leq 1) \approx 0,392$.
3. $E(X) = 20 \times 0,1 = 2$.

Exercice 10.

Dans un club de tir, le meilleur tireur touche une cible 19 fois sur 20. On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirs réussis par ce tireur lors d'une série de cinq tirs.

1. Préciser la loi de probabilité suivie par T .
2. Quelle est la probabilité que ce tireur réussisse exactement trois tirs?
3. Calculer $P(T \geq 4)$.
4. Calculer $E(T)$ et $\sigma(T)$. Que représentent ces résultats?

Exercice 10.

1. On répète 5 fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « le tireur atteint la cible ») de paramètre $p = \frac{19}{20}$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{19}{20}$. La variable aléatoire T qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5; \frac{19}{20})$.

2.

$$P(T = 3) = \binom{5}{3} \times \left(\frac{19}{20}\right)^3 \times \left(\frac{1}{20}\right)^2 \approx 0,021.$$

3. $P(T \geq 4) = 1 - P(T \leq 3) \approx 0,977$.

4. $E(T) = 5 \times \frac{19}{20} = 4,75$; $\sigma(T) = \sqrt{5 \times \frac{19}{20} \times \frac{1}{20}} = 0,487$.

Si l'on réitère un grand nombre de fois cette expérience on obtient 4,75 tirs dans la cible en moyenne par expérience. L'écart type σ est un indicateur de dispersion des résultats des différentes expériences par rapport à l'espérance.

Exercice 11.

Faire mouche

Antoine et Romain sont des fameux pêcheurs. On note A la variable aléatoire égale au nombre de lancers réussis lors d'une série de 15 lancers pour Antoine et R celle pour Romain lors d'une série de 25 lancers. Un lancer est réussi lorsqu'un poisson vient s'accrocher à l'hameçon. À chaque lancer, un poisson mord à la ligne d'Antoine avec une probabilité de 0,4 alors qu'elle vaut 0,25 pour Romain.

1. Préciser les lois de probabilité suivies par A et R .
2. Quelles sont les probabilités que ces pêcheurs réussissent chacun exactement trois lancers?
3. Calculer $E(A)$, $\sigma(A)$, $E(R)$ et $\sigma(R)$.
4. Interpréter ces résultats.

Exercice 11.

1. La variable aléatoire A qui compte le nombre de succès (« un poisson s'accroche à l'hameçon d'Antoine ») suit la loi binomiale $\mathcal{B}(15; 0,4)$. La variable aléatoire R qui compte le nombre de succès (« un poisson s'accroche à l'hameçon de Romain ») suit la loi binomiale $\mathcal{B}(25; 0,25)$.

2.

$$P(A = 3) = \binom{15}{3} \times 0,4^3 \times 0,6^{12} \approx 0,063.$$

$$P(R = 3) = \binom{25}{3} \times 0,25^3 \times 0,75^{22} \approx 0,064.$$

3.

$$E(A) = 15 \times 0,4 = 6; \quad \sigma(A) = \sqrt{15 \times 0,4 \times 0,6} \approx 1,897.$$

$$E(R) = 25 \times 0,25 = 6,25; \quad \sigma(R) = \sqrt{25 \times 0,4 \times 0,6} \approx 2,165.$$

Si Antoine réitère un grand nombre de fois l'expérience, 6 poissons mordent à son hameçon en moyenne par expérience, alors que si Romain réitère un grand nombre de fois l'expérience, 6,25 poissons mordent à son hameçon en moyenne par expérience. De plus $\sigma(R) > \sigma(A)$, ce qui indique qu'il y a plus de dispersions dans les valeurs prises par la variable aléatoire R que dans les valeurs prises par A . Cela signifie que le nombre de poissons mordant à l'hameçon variera davantage pour Romain que pour Antoine.

Exercice 12.

Une entreprise fabrique des téléphones portables. Un test de performance est appliqué à ces téléphones : il est positif dans 96 % des cas. Un téléphone dont le test est positif est vendu 500 €. Si le test est négatif, il est soldé à 300 €. On prélève au hasard 400 téléphones dans la production. Le volume de la production permet d'assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise. X est la variable aléatoire qui donne le nombre de téléphones conformes parmi les 400.

1. Préciser la loi de probabilité suivie par X .
2. Calculer l'espérance de X . Interpréter.
3. On appelle G la variable aléatoire qui modélise la recette réalisée sur la vente des 400 téléphones.
 - a. À l'aide d'un tableur, donner la loi de G .
 - b. En déduire la recette moyenne réalisée sur la vente de 400 téléphones.

Exercice 12.

1. On répète 400 fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « le test est positif ») de paramètre $p = 0,96$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 400$ et $p = 0,96$. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(400; 0,96)$.

2.

$$E(X) = 400 \times 0,96 = 384.$$

Si l'on réitère un grand nombre de fois cette expérience, on obtient 384 tests positifs en moyenne par expérience.

3.
 - a. Au tableur, on modélise la loi de la variable aléatoire G . On modélise la loi de X dans les deux premières colonnes en entrant la formule : =LOI.BINOMIALE(A3 ; 400 ; 0,96 ; 0) dans la cellule B3 puis en recopiant vers le bas. Ensuite, on obtient la loi de G en mettant dans la cellule C3 la formule : =A3*500+(400-A3)*300 qui représente la recette réalisée par la vente de 400 téléphones dont k sont testés positifs, et dans la cellule D3 la même formule que dans la cellule B3. On obtient ainsi la loi de G .
 - b. À l'aide du tableur, on calcule l'espérance de G en calculant :

$$\sum_{k=0}^{400} k \times P(G = k)$$

et on obtient la valeur 196 800. La recette moyenne réalisée sur la vente de 400 téléphones est de 196 800 €. On peut remarquer que l'on pouvait retrouver cette valeur en faisant le calcul :

$$E(X) \times 500 + (400 - E(X)) \times 300 = 196\,800.$$

Exercice 13.

Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,8$.

1. Calculer les probabilités suivantes en donnant le résultat à 10^{-3} près.
 - a. $P(X = 3)$
 - b. $P(X \leq 5)$
 - c. $P(X > 4)$
 - d. $P(X < 7)$
 - e. $P(3 \leq X \leq 8)$
 - f. $P_{(X \leq 9)}(6 \leq X)$
 - g. $P_{(X \leq 5)}(6 \leq X)$

h. $P_{(X \leq 9)}(X \leq 8)$

2. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de X .

Exercice 13.

1.
 - a. $P(X = 3) \approx 0,001$.
 - b. $P(X \leq 5) \approx 0,033$.
 - c. $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) \approx 0,994$.
 - d. $P(X < 7) = P(X \leq 6) = 0,121$.
 - e. $P(3 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 2) \approx 0,624$.
 - f. $P_{(X \leq 5)}(6 \leq X) = \frac{P((X \leq 5) \cap (6 \leq X))}{P(X \leq 5)} = 0$.
 - g. $P_{(X \leq 9)}(X \leq 8) = \frac{P((X \leq 9) \cap (X \leq 8))}{P(X \leq 9)} = \frac{P(X \leq 8)}{P(X \leq 9)} = \frac{0,6242}{0,8926} \approx 0,7$.
2. $E(X) = 10 \times 0,8 = 8$; $V(X) = 10 \times 0,8 \times 0,2 = 1,6$; $\sigma(X) = \sqrt{1,6} \approx 1,265$.

Exercice 14.

Une entreprise dispose d'un parc de 600 ordinateurs neufs. La probabilité que l'un d'entre eux tombe en panne pendant la première année est de 0,1. La panne de l'un des ordinateurs n'affecte pas les autres machines du parc.

1. Justifier que cette situation correspond à un schéma de Bernoulli et donner ses paramètres.
2. On considère la variable aléatoire X correspondant au nombre d'ordinateurs tombant en panne durant la première année. Quelle est la loi de probabilité de X ?
3. Quelle est la probabilité que 20 appareils tombent en panne la première année?
4. Quelle est la probabilité que 40 appareils ou moins tombent en panne durant la première année?

Exercice 14.

1. Deux issues sont possibles (en panne ou non la première année) et on répète 600 fois cette épreuve de manière identique et indépendante, car une panne n'affecte pas les autres ordinateurs. On retrouve bien un schéma de Bernoulli (dont le succès est « l'ordinateur tombe en panne la première année ») de paramètres $n = 600$ et $p = 0,1$.
2. La variable aléatoire X comptant le nombre d'ordinateurs tombant en panne la première année suit la loi binomiale $\mathcal{B}(600; 0,1)$.

3.

$$P(X = 20) = \binom{600}{20} \times 0,1^{20} \times 0,9^{580} \approx 0.$$

4. $P(X \leq 40) \approx 0,003$.

Exercice 15.

1. On lance trois fois un dé à jouer cubique non pipé et on note le numéro obtenu.
 - a. Quelle est la probabilité d'obtenir trois « 5 »?
 - b. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme de 15?
 - c. Quelle est la probabilité d'obtenir le premier « 5 » au troisième lancer?
2. On lance trois fois trois dés à jouer cubiques non pipés. Quelle est la probabilité d'obtenir trois fois une somme de 15?

Exercice 15.

1. a. Il n'y a qu'une seule manière d'obtenir trois « 5 » en lançant trois fois un dé cubique non pipé ; la probabilité d'obtenir un « 5 » avec un dé cubique non pipé étant égale à $\frac{1}{6}$. Ainsi,

$$P(\text{trois « 5 »}) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}.$$

- b. L'univers de la première, seconde et troisième épreuve est $U = (1; 2; 3; 4; 5; 6)$. L'univers de la succession des trois expériences précédentes est le produit cartésien des univers des expériences :

$$\Omega = U^3 = \{(1; 1; 1), (1; 1; 2), \dots, (6; 6; 6)\}.$$

Il y a 6^3 , soit 216 issues possibles et parmi celles-ci il y en a dix dont la somme des numéros des trois dés est égale à « 15 ». Donc,

$$P(\text{somme de « 15 »}) = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}.$$

- c. Pour obtenir le premier « 5 » au troisième lancer, il faut obtenir un autre chiffre que le « 5 » au premier lancer (ce qui offre 5 possibilités), un autre chiffre que le « 5 » au deuxième lancer (5 possibilités) et un « 5 » au troisième lancer (1 possibilité). Il y a donc $5 \times 5 \times 1 = 25$ issues pour lesquelles le « 5 » arrive au troisième lancer. Donc,

$$P(\text{premier « 5 » au troisième lancer}) = \frac{25}{216}.$$

2. On répète 3 fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « on obtient une somme de 15 ») de paramètre $p = \frac{5}{108}$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{5}{108}$. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3; \frac{5}{108})$ et

$$P(X = 3) = \left(\frac{5}{108}\right)^3 \approx 10^{-4}.$$

Exercice 16.

Une usine produit des pots de confiture dont la masse doit être de 500 g. Le service qualité de l'entreprise vérifie régulièrement quelques pots et sait que le matériel utilisé permet d'affirmer qu'un pot sur cinq a une masse inférieure à 490 g. On prélève dans la production 20 pots et on juge que la production est assez importante pour se permettre d'assimiler cette expérience à un tirage avec remise. La variable aléatoire X compte le nombre de pots jugés « défectueux » dans cet échantillon.

- Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
- Calculer la probabilité que l'on obtienne entre un et trois pots défectueux.
- Combien de pots faudrait-il prélever pour que la probabilité qu'il y ait au moins un pot défectueux soit d'au moins 99 % ?

Exercice 16.

- On répète 20 fois la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « la masse du pot est inférieure à 490 g ») de paramètre $p = \frac{1}{5} = 0,2$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 20$ et $p = 0,2$. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0,2)$.
- $P(1 \leq X \leq 3) = P(X \leq 3) - P(X = 0) \approx 0,3999$.

3. On cherche n pour que $P(X \geq 1) \geq 0,99$. Or,

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0,2)^n = 1 - 0,8^n.$$

Donc

$$P(X \geq 1) \geq 0,99 \iff 1 - 0,8^n \geq 0,99 \iff 0,8^n \leq 0,01 \iff n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)}.$$

Or, $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \approx 20,64$. Il faut donc prélever un minimum de 21 pots pour que la probabilité qu'il y ait au moins un pot défectueux soit supérieure à 99 %.

Exercice 17.

Une variable aléatoire suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Son espérance vaut 0,4 et son écart-type 0,6.

- Déterminer les paramètres n et p .

Exercice 17.

$$\begin{cases} E(X) = 0,4 \\ \sigma(X) = 0,6 \end{cases} \iff \begin{cases} n \times p = 0,4 \\ \sqrt{n \times p \times (1 - p)} = 0,6 \end{cases}$$

Or, $n \times p \times (1 - p) \geq 0$, donc :

$$\begin{cases} n \times p = 0,4 \\ n \times p \times (1 - p) = 0,36 \end{cases} \iff \begin{cases} n \times p = 0,4 \\ 1 - p = \frac{0,36}{0,4} \end{cases} \iff \begin{cases} n \times 0,1 = 0,4 \\ p = 0,1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 4 \\ p = 0,1 \end{cases}$$

Exercice 18.

Thibault est passionné par les reconstitutions historiques de la Première guerre mondiale. Il s'est inscrit dans une association comptant 500 membres. À chaque séance, les adhérents sont présents avec une probabilité de 0,7, et ce de façon indépendante les uns des autres. T désigne le nombre d'adhérents présents à une séance.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire T ? Donner ses paramètres.
2. Combien peut-on espérer de participants pour la prochaine séance?
3. 230 adhérents ont déjà répondu présent à la prochaine séance. Quelle est la probabilité qu'au moins 400 personnes participent à la prochaine reconstitution?

Exercice 18.

1. On répète 500 fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « l'adhérent est présent ») de paramètre $p = 0,7$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 500$ et $p = 0,7$. La variable aléatoire T qui compte le nombre d'adhérents présents représente le nombre de succès de ce schéma et suit la loi binomiale $\mathcal{B}(500; 0,7)$.
2. L'espérance de T est $E(T) = 500 \times 0,7 = 350$, donc en moyenne on peut espérer 350 adhérents pour la prochaine séance.
3. La probabilité cherchée est :

$$P_{(T \geq 230)}(T \geq 400) = \frac{P(T \geq 400)}{P(T \geq 230)} \approx 0.$$

Exercice 19.

Depuis le 6 octobre 2008, la formule du Loto français est la suivante : il faut obtenir cinq numéros parmi 49, plus un « numéro chance » parmi 10 pour être un gagnant au premier rang.

1. Montrer que le nombre de tirages possibles est 19 068 840.

2. On joue une grille. Quelle est la probabilité d'être gagnant au premier rang?
3. Il y a trois tirages par semaine (lundi, mercredi et vendredi). Un joueur décide de jouer la même grille à chaque tirage. Combien de temps doit-il jouer pour que ses chances d'être un gagnant au premier rang soient supérieures à 50 %? Commenter la réponse.

Exercice 19.

1. Le nombre de tirages possibles est égal au nombre de combinaisons de 5 numéros parmi 49 multiplié par le nombre de combinaisons d'un numéro parmi 10.

$$\binom{49}{5} \times \binom{10}{1} = 19068840.$$

2.

$$\frac{1}{19068840} \approx 5 \times 10^{-8}.$$

Avec une seule grille, la probabilité d'être un gagnant du premier rang est d'environ 5×10^{-8} .

3. On répète n fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « la grille est gagnante au premier rang ») de paramètre $p = 5 \times 10^{-8}$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres n et $p = 5 \times 10^{-8}$. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; 5 \times 10^{-8})$.

$$P(X \geq 1) > 0,5 \iff 1 - (1 - 5 \times 10^{-8})^n > 0,5 \iff (1 - 5 \times 10^{-8})^n < 0,5 \iff n > \frac{\ln(0,5)}{\ln(1 - 5 \times 10^{-8})}.$$

$$\text{Or, } \frac{\ln(0,5)}{\ln(1 - 5 \times 10^{-8})} \approx 13862943.$$

Comme le joueur joue 3 grilles par semaine et qu'il y a 52 semaines dans une année, et que :

$$\frac{13862943}{3 \times 52} \approx 88865,$$

il faut donc jouer la même grille pendant 88 865 ans à raison de 3 fois par semaine pour que la grille soit gagnante au premier rang avec une probabilité supérieure à 0,5.

Exercice 20.

Dans une partie de fléchettes, un joueur touche la zone centrale de la cible avec une probabilité de 0,1. Le joueur dispose de 10 fléchettes et gagne la partie dès qu'il atteint la zone centrale de la cible.

- Quelle est la probabilité qu'il gagne la partie?

Exercice 20.

Soit A l'événement « le joueur gagne la partie » et $\bar{A}$ l'événement « le joueur perd la partie ».

$$P(\bar{A}) = 0,9^{10} \quad \text{et} \quad P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,9^{10} \approx 0,651.$$

Exercice 21.

On lance deux dés cubiques non pipés et on totalise les points marqués.

- Au bout de 20 lancers, quelle est la probabilité d'avoir obtenu dix fois un total supérieur ou égal à 8?

Exercice 21.

1. Lorsque l'on lance deux dés cubiques non pipés, la probabilité d'obtenir un total des points supérieurs ou égal à 8 est de $\frac{15}{36}$.

On répète 20 fois de manière identique et indépendante cette même épreuve de Bernoulli (dont le succès est « obtenir un total de points supérieur ou égal à 8 ») de paramètre $p = \frac{15}{36}$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{15}{36}$.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20; \frac{15}{36})$.

$$P(X = 10) \approx 0,133,$$

donc au bout de 20 lancers, la probabilité d'avoir obtenu dix fois un total supérieur ou égal à 8 est environ 0,133.

Exercice 22.

Tony joue au basket et réussit quatre lancers francs sur cinq. Il fait des séries de 40 lancers francs (on considère qu'il ne se fatigue jamais et que ces lancers sont donc indépendants).

- En moyenne, combien réussit-il de lancers francs par série?

Exercice 22.

1. On répète 40 fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « Tony réussit son lancer franc ») de paramètre $p = \frac{4}{5} = 0,8$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 40$ et $p = 0,8$.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(40; 0,8)$.

$$E(X) = 40 \times 0,8 = 32.$$

S'il réitère un grand nombre de fois l'expérience, Tony réussit en moyenne 32 lancers francs par série.

Exercice 23.

Une entreprise d'événementiel organise un concert et vend 250 billets. Elle doit ensuite trouver une salle pouvant accueillir toutes les personnes. Elle considère que 90 % des personnes ayant acheté un billet se rendent au concert et souhaite que moins de 2 % des personnes ayant acheté un billet n'aient pas de place assise. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes présentes au concert.

1. Justifier que la loi de probabilité de X est une loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $p = 0,9$.
2. On note k le nombre de places assises. Montrer que le problème revient à chercher le plus petit entier k tel que $P(X > k) \leq 0,02$.
3. Combien de places assises doit contenir la salle pour que les souhaits de l'entreprise soient respectés?

Exercice 23.

1. On répète 250 fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « La personne se rend au concert ») de paramètre $p = 0,9$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 250$ et $p = 0,9$.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(250; 0,9)$.

2. X est le nombre de personnes présentes au concert, k le nombre de places assises; la société souhaite que moins de 2

Le problème revient donc à trouver le nombre de places assises minimum pour que la probabilité que « le nombre de personnes présentes soit supérieur au nombre de places assises » soit inférieure à 2

3.

$$P(X > k) \leq 0,02 \iff 1 - P(X \leq k) \leq 0,02 \iff P(X \leq k) \geq 0,98.$$

On cherche donc à l'aide du tableur la plus petite valeur de k telle que $P(X \leq k) \geq 0,98$.

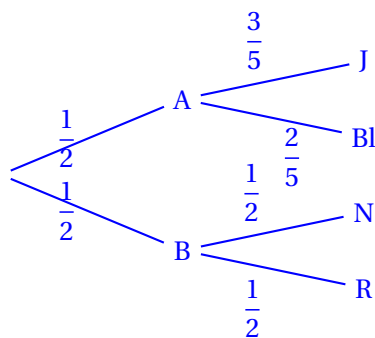
On trouve que la salle doit contenir 234 places pour satisfaire les souhaits de l'entreprise.

Exercice 24.

On considère deux urnes A et B. L'urne A contient trois jetons jaunes et deux jetons bleus. L'urne B contient trois jetons noirs, deux rouges et un jaune. L'expérience consiste à choisir une urne au hasard, puis à piocher un jeton dans l'urne choisie. On s'intéresse à la couleur du jeton saisi.

1. Représenter la situation par un arbre de probabilités.
2. Cette expérience est-elle une succession de deux épreuves indépendantes?
3. À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer la probabilité de l'événement J : « obtenir une boule jaune ».
4. Sachant que l'on a obtenu une boule jaune, quelle est la probabilité que la boule provienne de l'urne A? On rappelle la formule $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
5. On modifie l'expérience précédente, en considérant que l'on choisit l'urne A avec une probabilité égale à p . Pour quelle valeur de p la probabilité de l'événement J est-elle maximale?

Exercice 24.



1.

2. La première épreuve qui consiste à choisir une urne et la deuxième qui consiste à tirer une boule sont deux épreuves non indépendantes car la couleur de la boule tirée dépend de l'urne choisie.
3. L'univers de la première épreuve est $\Omega_1 = \{A; B\}$. L'univers de la deuxième épreuve est $\Omega_2 = \{J; Bl; N; R\}$.

$$\Omega = \{(A; J); (A; Bl); (B; J); (B; N); (B; R)\}.$$

$$P(J) = P(A; J) + P(B; J) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{23}{60}.$$

4.

$$P_J(A) = \frac{P(A \cap J)}{P(J)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}}{\frac{23}{60}} = \frac{3}{10} \times \frac{60}{23} = \frac{18}{23}.$$

5.

$$P(J) = P(A \cap J) + P(B \cap J) = p \times \frac{3}{5} + (1 - p) \times \frac{1}{6} = \frac{13}{30}p + \frac{1}{6}.$$

La fonction définie sur $[0; 1]$ par $p \mapsto \frac{13}{30}p + \frac{1}{6}$ est croissante sur $[0; 1]$. On en déduit que la probabilité de l'événement J est maximale pour $p = 1$.

Exercice 25.

Une grande enseigne de cosmétiques lance une nouvelle crème hydratante. Cette enseigne souhaite vendre la nouvelle crème dans un conditionnement de 50 mL. On considère que la proportion de pots non conformes dans la production est égale à 0,06. Une boutique commande à son fournisseur 50 pots de cette nouvelle crème. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pots non conformes dans cette commande.

1. Quelle loi de probabilité suit la variable Y ?
2. Calculer la probabilité que la boutique reçoive deux pots non conformes ou moins.
3. Quel est le nombre moyen de pots non conformes dans une commande de 50 pots ?

Exercice 25.

1. On répète 50 fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « le pot est non conforme ») de paramètre $p = 0,06$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 50$ et $p = 0,06$.

La variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50; 0,06)$.

2. $P(Y \leq 2) \approx 0,416$.

3.

$$E(Y) = 50 \times 0,06 = 3.$$

Il y a en moyenne trois pots non conformes dans une commande de 50 pots.

Exercice 26.

Une entreprise fabrique en grande quantité des bijoux fantaisie dont 5 % sont défectueux et donc invendables. On prélève au hasard 60 bijoux dans la production journalière de l'entreprise. La production est suffisamment importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 60 bijoux. On considère la variable aléatoire X qui indique le nombre de bijoux invendables.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la probabilité d'obtenir :
 - a. trois bijoux invendables ;
 - b. au plus cinq bijoux invendables ;
 - c. un nombre de bijoux invendables inférieur ou égal à 2 ;
 - d. un nombre de bijoux invendables strictement supérieur à 6.
3. Calculer l'espérance de X puis interpréter le résultat.

Exercice 26.

1. On répète 60 fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « le bijou est défectueux ») de paramètre $p = 0,05$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 60$ et $p = 0,05$.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(60; 0,05)$.

2.
 - a. $P(X = 3) \approx 0,230$.
 - b. $P(X \leq 5) \approx 0,921$.

c. $P(X \leq 2) \approx 0,417$.

d. $P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) \approx 0,030$.

3.

$$E(X) = 60 \times 0,05 = 3.$$

Si on réitère un grand nombre de fois l'expérience, il y a en moyenne trois bijoux défectueux par prélèvement.

Exercice 27.

Une classe de terminale compte 35 élèves, dont 12 « experts » ont choisi l'enseignement « mathématiques expertes ». À chaque cours de philosophie, le professeur interroge un élève au hasard, sans se souvenir des élèves précédemment interrogés.

1. Soient n un entier strictement positif et E la variable aléatoire égale au nombre d'élèves « experts » interrogés lors des n premiers cours. Quelle est la loi suivie par E ?
2. Quelle est la probabilité que, durant les dix premiers cours, exactement cinq élèves « experts » soient interrogés?
3. À partir de combien de cours la probabilité qu'aucun élève « expert » ne soit interrogé devient-elle inférieure à 0,05?
4. Durant le premier trimestre, il y a 40 cours de philosophie. Combien d'élèves « experts » le professeur peut-il espérer interroger durant cette période?

Exercice 27.

1. On répète n fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « l'élève interrogé est expert ») de paramètre $p = \frac{12}{35}$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres n et $p = \frac{12}{35}$.

La variable aléatoire E qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; \frac{12}{35})$.

2. Pour $n = 10$, E suit la loi $\mathcal{B}(10; \frac{12}{35})$ et

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} \times \left(\frac{12}{35}\right)^5 \times \left(\frac{23}{35}\right)^5 \approx 0,146.$$

La probabilité que, durant les dix premiers cours, exactement cinq élèves « experts » soient interrogés est d'environ 0,146.

3.

$$P(X = 0) < 0,05 \iff \left(\frac{23}{35}\right)^n < 0,05 \iff n \times \ln\left(\frac{23}{35}\right) < \ln(0,05) \iff n > \frac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{23}{35}\right)}.$$

Or $\frac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{23}{35}\right)} \approx 7,14$, il faut donc au moins 8 cours pour que la probabilité qu'aucun élève « expert » ne soit interrogé devienne inférieure à 0,05.

On peut aussi trouver le résultat en calculant à l'aide de la calculatrice les puissances successives de $\frac{23}{35}$.

4. Pour $n = 40$, E suit la loi $\mathcal{B}(40; \frac{12}{35})$ et

$$E(E) = 40 \times \frac{12}{35} = 13,7.$$

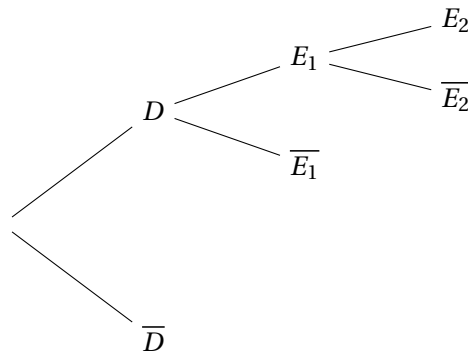
Le professeur peut espérer interroger environ 14 élèves durant cette période.

Exercice 28.

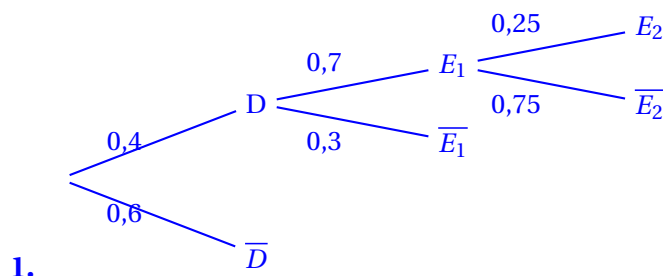
Pour embaucher ses cadres, une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante : Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

- On choisit au hasard le dossier d'un candidat. On considère les événements : D : « le candidat est retenu sur dossier » ; E_1 : « le candidat est retenu à l'issue du premier entretien » ; E_2 : « le candidat est recruté ».

a. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant :



- Calculer la probabilité de l'événement E_1 .
 - On note F l'événement « le candidat n'est pas recruté ». Démontrer que la probabilité de l'événement F est égale à 0,93.
- Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leurs dossiers sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à 0,07. On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi les cinq candidats.
 - Justifier que X suit la loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
 - Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira le résultat à 10^{-3} .
 - Quel est le nombre minimal de dossiers que le cabinet doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999?

Exercice 28.

- $P(E_1) = P(D \cap E_1) = P(D) \times P_D(E_1) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$.
 - $P(F) = P(\overline{D}) + P(D \cap \overline{E_1}) + P(D \cap E_1 \cap \overline{E_2}) = 0,6 + 0,4 \times 0,3 + 0,4 \times 0,7 \times 0,75 = 0,93$.
 - On peut aussi calculer cette probabilité à l'aide de l'événement contraire : $P(F) = P(\overline{E_2}) = 1 - P(E_2) = 1 - 0,4 \times 0,7 \times 0,25 = 0,93$.
- Chaque dossier est étudié indépendamment des autres et chaque candidat a une probabilité d'être recruté égale à 0,07. La variable X suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(5; 0,07)$.

b.

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0,07^2 \times 0,93^3 \approx 0,039.$$

3. Le problème revient à résoudre l'inéquation $P(X \geq 1) > 0,999$. Or $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,93^n$.

$$P(X \geq 1) > 0,999 \iff 1 - 0,93^n > 0,999 \iff 0,93^n < 0,001 \iff n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,93)}.$$

Or $\frac{\ln(0,001)}{\ln(0,93)} \approx 95,1$, il faut donc traiter au moins 96 dossiers pour avoir une probabilité supérieure à 0,999 de recruter au moins un candidat.

Exercice 29.

Les trois pales d'une éolienne doivent être contrôlées périodiquement. On a établi quatre classes de gravité des dommages :

- Classe 4 : dégâts légers qui ne nécessitent ni intervention ni arrêt.
- Classe 3 : la pale est réparée sur place.
- Classe 2 : la pale doit être démontée.
- Classe 1 : les trois pales doivent être changées.

Dans 98,2 % des cas, le technicien ne diagnostique aucun souci sur la pale ou bien seulement un dommage de classe 4. Dans tous les autres cas, on dira que la pale est défaillante. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque inspection de 70 éoliennes, associe le nombre de pales nécessitant une intervention.

1. Justifier que X suit la binomiale $\mathcal{B}(210; 0,018)$.
2. Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucune pale nécessitant une intervention.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus deux pales défaillantes.
4. Calculer le nombre moyen de pales nécessitant une intervention.

Exercice 29.

1. On répète 210 fois (chaque éolienne possède 3 pales, les 70 éoliennes possèdent 210 pales) de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « la pale nécessite une intervention ») de paramètre $p = 1 - 0,982 = 0,018$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 210$ et $p = 0,018$.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(210; 0,018)$.

2. $P(X = 0) = 0,982^{210} \approx 0,0221$.

3. $P(X \leq 2) \approx 0,2695$.

4.

$$E(X) = 210 \times 0,018 = 3,78.$$

Il y a en moyenne environ 4 pales nécessitant une intervention.

Exercice 30.

Un garagiste choisit au hasard n pneus dans son stock. Le stock est suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage avec remise. Le fabricant des pneus annonce qu'un pneu pris au hasard a un défaut avec une probabilité de 0,065. La variable aléatoire X modélise le nombre de pneus défectueux dans le lot de n pneus.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Dans cette question uniquement, $n = 12$.

- a. Calculer la probabilité qu'aucun pneu défectueux ne soit choisi.
 - b. Calculer la probabilité qu'au plus deux pneus choisis soient défectueux.
3. Est-il vrai que si le garagiste change les quatre pneus d'une voiture, alors il y a plus d'une chance sur deux pour qu'au moins un pneu soit défectueux?

Exercice 30.

1. On répète n fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « le pneu a un défaut ») de paramètre $p = 0,065$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres n et $p = 0,065$.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; 0,065)$.

2. a. $P(X = 0) = (1 - 0,065)^{12} \approx 0,446$.

b. $P(X \leq 2) \approx 0,961$.

3. On répète 4 fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « le pneu a un défaut ») de paramètre $p = 0,065$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = 0,065$.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4; 0,065)$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0,065)^4 \approx 0,236.$$

Or $0,236 < 0,5$; il y a moins d'une chance sur deux, c'est donc faux.

Exercice 31.

Pour aller chercher ses enfants en voiture à l'école, Amine doit passer trois feux tricolores. Les trois feux ont respectivement une probabilité de 0,45, de 0,55 et de 0,80 d'être verts. Les feux ne sont pas coordonnés : ils sont indépendants les uns des autres. On note A_i l'événement « Amine s'arrête au feu numéro i » (i pouvant valoir 1, 2 ou 3) et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où Amine doit s'arrêter.

1. Modéliser la situation par le produit cartésien de trois univers. Combien compte-t-on d'issues?
2. Combien compte-t-on de sous-parties de ce produit cartésien à deux éléments?
3. Construire un arbre pondéré représentant la situation étudiée.
4. Dédurre de la question 2 le nombre de chemins de l'arbre qui présente exactement deux arrêts.
5. Quelle est la probabilité qu'Amine doive s'arrêter deux fois sur son parcours? On rappelle que l'on s'arrête si le feu est orange ou rouge.
6. Déterminer la probabilité qu'Amine ne s'arrête à aucun feu.
7. a. Dresser un tableau donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
b. Déterminer l'espérance de X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 31.

1. $\Omega_1 = \{A_1; \overline{A_1}\}$, $\Omega_2 = \{A_2; \overline{A_2}\}$ et $\Omega_3 = \{A_3; \overline{A_3}\}$.

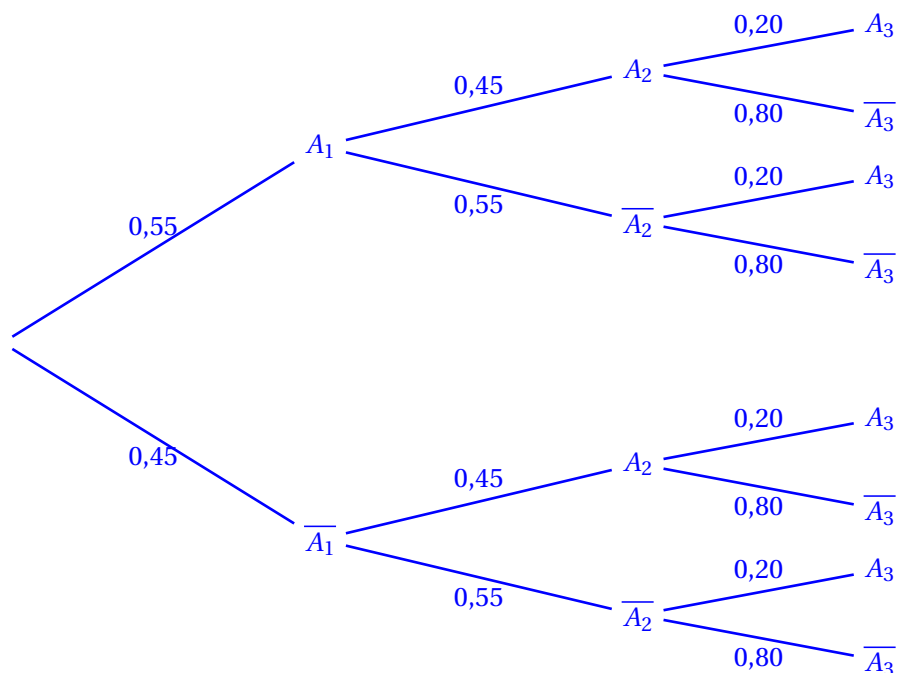
Le produit cartésien des trois univers est $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$, à savoir $\{(A_1; A_2; A_3); (A_1; A_2; \overline{A_3}); (A_1; \overline{A_2}; A_3); \dots; (\overline{A_1}; \overline{A_2}; \overline{A_3})\}$.

Le nombre d'issues est égal aux nombres de parties de l'ensemble $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$ c'est-à-dire à $2^3 = 8$.

2. Le nombre de sous-parties à deux éléments parmi trois s'écrit $\binom{3}{2}$. Or $\binom{3}{2} = 3$.

Il y a donc 3 sous-parties à deux éléments de ce produit cartésien.

3. Arbre :



4. Le nombre de chemins menant à deux succès et donc à un échec est égal au nombre de sous-parties à deux éléments dans un ensemble de trois; d'après la question 2, il y en a 3.

$$\begin{aligned}
 5. \quad P(X=2) &= P((A_1; A_2; \overline{A_3})) + P((A_1; \overline{A_2}; A_3)) + P((\overline{A_1}; A_2; A_3)) \\
 &= 0,55 \times 0,45 \times 0,80 + 0,55 \times 0,55 \times 0,20 \\
 &\quad + 0,45 \times 0,45 \times 0,20 \\
 &= 0,299.
 \end{aligned}$$

$$6. \quad P(X=0) = P((\overline{A_1}; \overline{A_2}; \overline{A_3})) = 0,45 \times 0,55 \times 0,80 = 0,198.$$

7. a. Loi de probabilité :

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	0,198	0,4535	0,299	0,0495

$$b. \quad E(X) = 0 \times 0,198 + 1 \times 0,4535 + 2 \times 0,299 + 3 \times 0,0495 = 1,2.$$

Si Amine effectue un grand nombre de trajets, il s'arrêtera en moyenne 1,2 fois par trajet.

Exercice 32.

Une urne contient trois boules blanches et sept boules noires indiscernables au toucher. Un jeu consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules de cette urne. La partie est gagnée si les deux boules tirées sont de couleurs différentes.

1. Calculer la probabilité de gagner la partie.
2. Soit n un entier strictement supérieur à 2. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de parties gagnées par le joueur et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.
 - a. Quelle est la loi de X ?
 - b. Calculer p_{10} en arrondissant au millièème.
 - c. Exprimer p_n en fonction de n .
 - d. Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

Exercice 32.

1. Soit N_1 l'évènement : « la première boule tirée est noire ».
 Soit N_2 l'évènement : « la deuxième boule tirée est noire ».
 Soit B_1 l'évènement : « la première boule tirée est blanche ».
 Soit B_2 l'évènement : « la deuxième boule tirée est blanche ».
 Soit p la probabilité que le joueur gagne la partie.

$$p = P((N_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap N_2)) = P(N_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap N_2)$$

$$= \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} = 0,42.$$

2. a. On répète n fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « la partie est gagnée ») de paramètre $p = 0,42$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres n et $p = 0,42$.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; 0,42)$.

$$\text{b. } p_{10} = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0,42)^{10} = 1 - 0,58^{10}$$

$$\approx 0,996.$$

$$\text{c. } p_n = 1 - 0,58^n.$$

$$\text{d. } 1 - 0,58^n \geq 0,99 \Leftrightarrow 0,58^n \leq 0,01 \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,58)}$$

$$(\text{car } \ln(0,58) < 0).$$

Or, $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,58)} \approx 8,45$. Il faut donc jouer un minimum de 9 parties pour que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

Exercice 33.

Lorsqu'on joue à la roulette au casino, on peut miser sur un des 37 numéros. Si la bille s'arrête sur le numéro choisi, on gagne 35 fois sa mise. Thomas se dit qu'en misant 2 € sur 30 numéros, il a une probabilité de $\frac{30}{37}$ de gagner 10 €.

1. Vérifier les calculs de Thomas en donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire modélisant son gain algébrique.
2. Thomas joue dix fois de suite en respectant sa stratégie. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où il gagne et G la variable aléatoire qui modélise son gain algébrique.
 - a. Montrer que $G = 70X - 600$.
 - b. Quelle loi suit X ? En déduire l'espérance de X .
 - c. En admettant que $E(G) = 70E(X) - 600$, quel gain moyen peut espérer Thomas?
3. Thomas joue n fois, toujours avec la même stratégie. Existe-t-il une valeur de n qui lui soit favorable?

Exercice 33.

1. Si la bille s'arrête sur un numéro joué par Thomas son gain sera de $35 \times 2 - 30 \times 2 = 10$.

Comme la roue est composée de 37 numéros, Thomas a donc une probabilité de $\frac{30}{37}$ de gagner 10 euros.

Si la bille s'arrête sur un autre numéro que ceux joués par Thomas son gain sera de $-30 \times 2 = -60$ avec une probabilité de $\frac{7}{37}$.

La loi du gain algébrique de Thomas peut être résumée dans ce tableau :

<i>Gain algébrique</i>	10	-60
<i>Probabilité</i>	$\frac{30}{37}$	$\frac{7}{37}$

2. a. Thomas joue dix parties. Lorsqu'il gagne, il gagne 10 € et lorsqu'il perd, il perd 60 €. X compte le nombre de fois où Thomas gagne et G le gain algébrique donc

$$G = 10 \times X - 60 \times (10 - X) = 10X - 600 + 60X = 70X - 600.$$

- b. On répète 10 fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « la bille s'arrête sur un numéro joué par Thomas ») de paramètre $p = \frac{30}{37}$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{30}{37}$.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10; \frac{30}{37}\right)$.

$$E(X) = 10 \times \frac{30}{37} = \frac{300}{37} \simeq 8,11.$$

Si Thomas joue dix fois de suite un grand nombre de fois, il peut espérer gagner en moyenne 8,1 fois.

- c. Soit G la variable aléatoire modélisant le gain de Thomas.

$$E(G) = 70E(X) - 600 \simeq -32,43.$$

Si Thomas joue dix fois de suite un grand nombre de fois, il perdra en moyenne 32,43 €.

3. Lorsque Thomas joue n fois avec la même stratégie, X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n; \frac{30}{37}\right)$ et $E(X) = n \times \frac{30}{37}$.

On en déduit que

$$E(G) = \frac{30n}{37} \times 10 - \left(n - \frac{30n}{37}\right) \times 60 = -\frac{120n}{37}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{120n}{37} \leq 0$, Thomas ne peut donc pas espérer gagner de l'argent avec sa stratégie.

Exercice 34.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1. Tous les résultats de cet exercice seront arrondis à 10^{-2} près.

- On prélève dans cette production, successivement et avec remise, huit stylos. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés. On admet que X suit une loi binomiale.
 - Donner les paramètres de cette loi.
 - Calculer la probabilité des événements suivants : A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut » ; B : « il y a au moins un stylo avec un défaut » ; C : « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».
- En vue d'améliorer les rendements de l'entreprise, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20 % des stylos avec défaut. On prend au hasard un stylo dans la production. On note D l'événement « le stylo présente un défaut » et E l'événement « le stylo est accepté ».
 - Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé.
 - Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.
 - Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à 0,022 à 10^{-3} près.
- Après le contrôle, on prélève, successivement et avec remise, huit stylos parmi les stylos acceptés. Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos. Comparer ce résultat avec la probabilité de l'événement A calculée à la question 1.b. Quel commentaire peut-on faire?

Exercice 34.

1. a. On répète 8 fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « le stylo présente un défaut ») de paramètre $p = 0,1$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 8$ et $p = 0,1$.

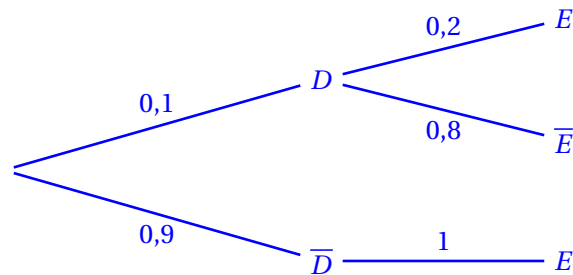
La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(8; 0,1)$.

b. $P(A) = P(X = 0) \simeq 0,43$ à 10^{-2} près.

$$P(B) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \simeq 0,57 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

$$P(C) = P(X = 2) \simeq 0,15 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

2. a. Arbre :



b. $P(E) = P(D) \times P_D(E) + P(\bar{D}) \times P_{\bar{D}}(E) = 0,1 \times 0,2 + 0,9 \times 1$
 $= 0,92.$

c. $P_E(D) = \frac{P(D \cap E)}{P(E)} = \frac{0,02}{0,92} = \frac{1}{46} \simeq 0,022$ à 10^{-3} près.

3. On répète 8 fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « le stylo ne présente pas de défaut ») de paramètre $p = 1 - 0,022 = 0,978$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 8$ et $p = 0,978$.

La variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(8; 0,978)$.

$$P(Y = 8) = \binom{8}{8} \times 0,978^8 \times 0,022^0 \simeq 0,84 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Le contrôle permet de presque doubler les chances d'avoir un lot de huit stylos sans défaut.