

EXERCICES

Intégrales

Mots clés : géométrie, primitives (calcul simple), propriétés de l'intégrale, IPP, aire entre deux courbes, valeur moyenne, suites d'intégrales

Exercice 1.

Calculer

On considère la fonction r définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$r(x) = \frac{1}{2}x + 4.$$

Déterminer, en unité d'aire du repère, l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe représentative de la fonction r , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$.

géométrie

Exercice 1.

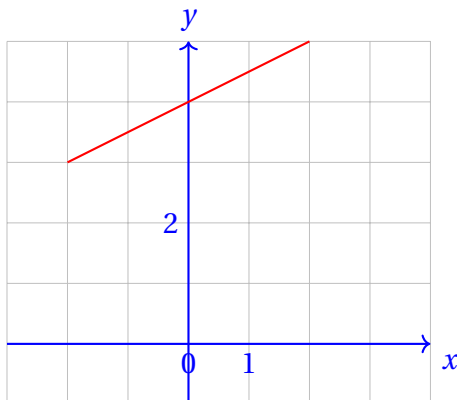
La fonction r est continue et positive sur $[-2; 2]$ car

$$-2 \leq x \leq 2 \Rightarrow -1 \leq \frac{1}{2}x \leq 1 \Rightarrow 3 \leq \frac{1}{2}x + 4 \leq 5.$$

Donc $\int_{-2}^2 r(x) dx$ est l'aire, en unité d'aire du repère, du domaine délimité par la courbe de r , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$. Soit,

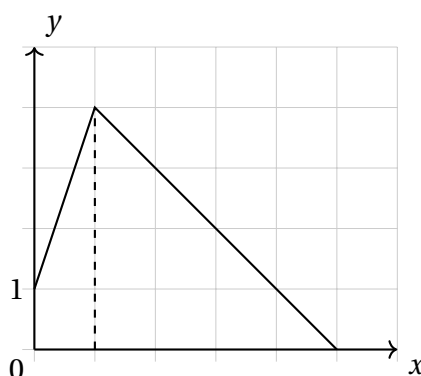
$$\int_{-2}^2 r(x) dx = \frac{(r(2) + r(-2)) \times (2 - (-2))}{2} = \frac{(5 + 3) \times 4}{2} = 16.$$

L'aire cherchée vaut donc 16 u.a.



Exercice 2.

La courbe d'une fonction f , définie sur l'intervalle $[0; 5]$, est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé.



Calculer $\int_0^5 f(u) du$.

géométrie

Exercice 2.

La fonction f est une fonction continue et positive sur $[0;5]$.

Donc $\int_0^5 f(u) du$ est l'aire, en unité d'aire du repère, du domaine délimité par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 5$. Pour calculer cette aire, on la décompose en deux :

$$\begin{aligned}\int_0^5 f(u) du &= \int_0^1 f(u) du + \int_1^5 f(u) du \\ &= \frac{1 \times (1+4)}{2} + \frac{4 \times 4}{2} = \frac{5}{2} + 8 = \frac{21}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 3.

Calculer les intégrales suivantes.

1. $I = \int_1^4 \frac{3}{x} dx$
2. $J = \int_0^2 (-4t^2 + 1) dt$
3. $K = \int_{-1}^1 (1+s)^2 ds$
4. $L = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2y} dy$

primitives (calcul simple)

Exercice 3.

1. Soit $f(x) = \frac{3}{x}$ définie sur $[1;4]$. La fonction F définie par $F(x) = 3 \ln(x)$ est une primitive de f sur $[1;4]$.

$$I = \int_1^4 \frac{3}{x} dx = [3 \ln(x)]_1^4 = 3 \ln(4) - 3 \ln(1) = 3 \ln(4).$$

2. Soit $f(t) = -4t^2 + 1$ définie sur $[0;2]$. La fonction F définie par $F(t) = -\frac{4}{3}t^3 + t$ est une primitive de f sur $[0;2]$.

$$J = \int_0^2 (-4t^2 + 1) dt = \left[-\frac{4}{3}t^3 + t \right]_0^2 = -\frac{4}{3} \times 2^3 + 2 - \left(-\frac{4}{3} \times 0^3 + 0 \right) = -\frac{26}{3}.$$

3. Soit $f(s) = (1+s)^2$ définie sur $[-1;1]$. $F(s) = \frac{1}{3}(1+s)^3$ est une primitive de f sur $[-1;1]$.

$$K = \int_{-1}^1 (1+s)^2 ds = \left[\frac{1}{3}(1+s)^3 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3}(1+1)^3 - \frac{1}{3}(1-1)^3 = \frac{8}{3}.$$

4. Soit $f(y) = e^{2y}$ définie sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. La fonction F définie par $F(y) = \frac{1}{2}e^{2y}$ est une primitive de f sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

$$L = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2y} dy = \left[\frac{1}{2}e^{2y} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}e^1 - \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}(e-1).$$

Exercice 4.

Calculer les intégrales suivantes.

1. $I = \int_4^9 \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$
2. $J = \int_0^5 \frac{1}{u+2} du$
3. $K = \int_1^2 \frac{-2}{x^3} dx$
4. $L = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(y) dy$

primitives (calcul simple)

Exercice 4.

1. $I = \int_4^9 \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = [\sqrt{t}]_4^9 = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1.$
2. $J = \int_0^5 \frac{1}{u+2} du = [\ln(u+2)]_0^5 = \ln(7) - \ln(2) = \ln\left(\frac{7}{2}\right).$
3. $K = \int_1^2 \frac{-2}{x^3} dx = \left[\frac{1}{x^2}\right]_{-1}^2 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}.$
4. $L = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(y) dy = [-\cos(y)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Exercice 5.

Calculer les intégrales suivantes.

1. $I = \int_0^2 (-2t^3 + 4t^2 - 5t) dt$
2. $J = \int_{10}^{12} \frac{2u}{u^2-8} du$
3. $K = \int_1^2 6x(x^2+4)^3 dx$
4. $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin\left(3y + \frac{\pi}{2}\right) dy$

primitives (calcul simple)

primitives (calcul simple)

Exercice 5.

1. $I = \int_0^2 (-2t^3 + 4t^2 - 5t) dt = \left[-\frac{1}{2}t^4 + \frac{4}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2\right]_0^2$
 $= -8 + \frac{32}{3} - 10 = -\frac{22}{3}.$
2. $J = \int_{10}^{12} \frac{2u}{u^2-8} du = [\ln(u^2-8)]_{10}^{12} = \ln(136) - \ln(92)$
 $= \ln\left(\frac{136}{92}\right) = \ln\left(\frac{34}{23}\right).$
3. $K = \int_1^2 6x(x^2+4)^3 dx = \left[\frac{3}{4}(x^2+4)^4\right]_1^2 = 3\,072 - \frac{1\,875}{4}$
 $= \frac{10\,413}{4}.$

$$4. L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin\left(3y + \frac{\pi}{2}\right) dy = \left[-\cos\left(3y + \frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ = -\cos(2\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Exercice 6.

On note I l'intégrale $\int_0^1 \frac{3x+4}{x+1} dx$.

1. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$,

$$\frac{3x+4}{x+1} = 3 + \frac{1}{x+1}.$$

2. En déduire la valeur exacte puis une valeur approchée au dixième de I .

primitives (calcul simple)

Exercice 6.

$$1. \text{ Pour tout } x \in [0; 1], 3 + \frac{1}{x+1} = \frac{3(x+1)+1}{x+1} = \frac{3x+4}{x+1}.$$

$$2. I = \int_0^1 \frac{3x+4}{x+1} dx = \int_0^1 3 + \frac{1}{x+1} dx = [3x + \ln(x+1)]_0^1$$

$$= 3 + \ln(2) \approx 3,7 \text{ au dixième près.}$$

Exercice 7.

Calculer les intégrales suivantes.

$$1. I = \int_0^1 -3e^{-3x} dx$$

$$2. J = \int_0^{\frac{1}{2}} \pi \sin(\pi x) dx$$

$$3. K = \int_0^1 \frac{-1}{(1+y)^2} dy$$

$$4. L = \int_{-1}^1 15t^4 (t^5 + 2)^3 dt$$

primitives (calcul simple)

Exercice 7.

$$1. I = \int_0^1 -3e^{-3x} dx = [e^{-3x}]_0^1 = e^{-3} - 1.$$

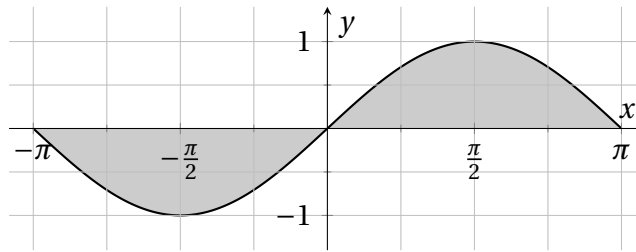
$$2. J = \int_0^{\frac{1}{2}} \pi \sin(\pi x) dx = [-\cos(\pi x)]_0^{\frac{1}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) = 1.$$

$$3. K = \int_0^1 \frac{-1}{(1+y)^2} dy = \left[\frac{1}{1+y}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

$$4. L = \int_{-1}^1 15t^4 (t^5 + 2)^3 dt = \left[\frac{3}{4} (t^5 + 2)^4\right]_{-1}^1 = \frac{243}{4} - \frac{3}{4} = 60.$$

Exercice 8.

On considère la surface colorée ci-dessous construite, dans un repère orthonormé, avec la courbe de la fonction f définie sur $[-\pi; \pi]$ par $f(x) = \sin(x)$.



Calculer son aire en unité d'aire du repère.

primitives (calcul simple)

Exercice 8.

La fonction f est impaire donc l'aire, en unité d'aire du repère, est égale à :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \, dx = 2 \int_0^{\pi} \sin(x) \, dx = 2 [-\cos(x)]_0^{\pi} \\ &= 2(-\cos(\pi) + \cos(0)) = 4\end{aligned}$$

Exercice 9.

En remarquant que, pour tout réel x strictement positif :

$$\frac{1}{x \ln(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$$

calculer l'intégrale $\int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{x \ln(x)} \, dx$.

primitives (calcul simple)

Exercice 9.

$$\begin{aligned}\int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{x \ln(x)} \, dx &= \int_{e^2}^{e^3} \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} \, dx = [\ln(\ln(x))]_{e^2}^{e^3} \\ &= \ln(3) - \ln(2) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

Exercice 10.

Calculer les intégrales suivantes.

$$1. \quad I = \int_4^{25} \left(\frac{5}{\sqrt{x}} + 3x \right) \, dx$$

$$2. \quad J = \int_{-2}^3 \cos(\pi x) \, dx$$

$$3. \quad K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \, dx$$

$$4. \quad L = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{2t+1}} \, dt$$

primitives (calcul simple)

Exercice 10.

1.

$$\begin{aligned}
 I &= \left[10\sqrt{x} + \frac{3}{2}x^2 \right]_4^{25} \\
 &= 10\sqrt{25} + \frac{3}{2} \times 25^2 - \left(10\sqrt{4} + \frac{3}{2} \times 4^2 \right) \\
 &= \frac{1887}{2}
 \end{aligned}$$

2.

$$J = \left[\frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \right]_{-2}^3 = \frac{1}{\pi} (\sin(3\pi) - (\sin(-2\pi))) = 0$$

3.

$$\begin{aligned}
 K &= [\ln(\sin(x))]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \ln(1) - \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
 &= -\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)
 \end{aligned}$$

4.

$$L = \left[\sqrt{2t+1} \right]_0^3 = \sqrt{7} - 1$$

Exercice 11.

Calculer les intégrales suivantes.

$$1. \quad I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} dx$$

$$2. \quad J = \int_0^1 \frac{t^4}{(t^5 + 1)^3} dt$$

$$3. \quad K = \int_1^2 \frac{1}{(1+x)^2} dx$$

$$4. \quad L = \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx$$

*primitives (calcul simple)***Exercice 11.**

1.

$$I = [-\ln(e^{-x} + 1)]_0^{-1} = -\ln(e^{-1} + 1) + \ln(2) = \ln\left(\frac{2}{e^{-1} + 1}\right)$$

2.

$$\begin{aligned}
 J &= \left[-\frac{1}{10} \times \frac{1}{(t^5 + 1)^2} \right]_0^{-1} = -\frac{1}{10} \times \frac{1}{(1+1)^2} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{(0+1)^2} \\
 &= -\frac{1}{40} + \frac{1}{10} = \frac{3}{40}
 \end{aligned}$$

3.

$$K = \left[-\frac{1}{1+x} \right]_1^2 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

4.

$$L = \left[\frac{1}{3} e^{x^3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}(e - 1)$$

Exercice 12.

On note I l'intégrale $\int_0^1 \frac{3x+1}{x+1} dx$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$:

$$\frac{3x+1}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}.$$

2. En déduire la valeur exacte de I .

primitives (calcul simple)

Exercice 12.

1. Pour tout $x \neq -1$, $\frac{3x+1}{x+1} = \frac{3(x+1)-2}{x+1} = 3 + \frac{-2}{x+1}$. On peut donc prendre $a = 3$ et $b = -2$.
2. $I = \int_0^1 \frac{3x+1}{x+1} dx = \int_0^1 \left(3 + \frac{-2}{x+1} \right) dx = [3x - 2\ln(x+1)]_0^1 = 3 - 2\ln(2).$

Exercice 13.

On considère la fonction F , définie sur $[1; 2]$ par :

$$F(x) = \int_1^x (2-t) \ln(t) dt.$$

1. Que représente F pour la fonction $t \mapsto (2-t) \ln(t)$?
2. Déterminer le sens de variation de F sur $[1; 2]$.
3. Déterminer, selon les valeurs de x , le signe de $F(x)$ pour x appartenant à $[1; 2]$.

primitives (calcul simple)

Exercice 13.

1. F est la primitive de la fonction $t \mapsto (2-t) \ln(t)$ qui s'annule en $x = 1$.
2. D'où F dérivable sur $[1; 2]$ et pour tout $x \in [1; 2]$ $F'(x) = (2-x) \ln(x)$. Or, sur $[1; 2]$, $2-x \geq 0$ et $\ln(x) \geq 0$ donc F' est positive sur $[1; 2]$ et par suite, F est croissante sur $[1; 2]$.
3. $F(1) = 0$ et F croissante sur $[1; 2]$ donc F est positive sur $[1; 2]$.

Exercice 14.

Calculer les intégrales suivantes.

1. $I = \int_1^2 \frac{3}{x^4} dx$
2. $J = \int_0^3 \frac{1}{2x+1} dx$
3. $K = \int_0^1 (1+u)^3 du$
4. $L = \int_0^1 ye^{y^2+1} dy$

primitives (calcul simple)

Exercice 14.

- 1.

$$I = \left[\frac{-1}{x^3} \right]_1^2 = -\frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{8}.$$

- 2.

$$J = \left[\frac{1}{2} \ln(2x+1) \right]_0^3 = \frac{1}{2} \ln(7).$$

3.

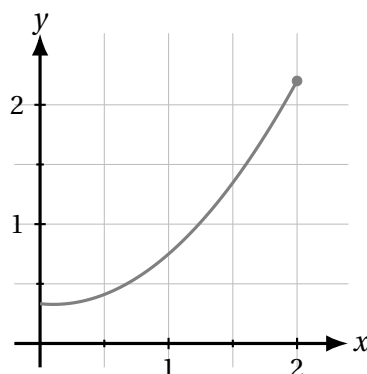
$$K = \left[\frac{1}{4}(1+u)^4 \right]_0^1 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

4.

$$L = \left[\frac{1}{2}e^{y^2+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e = \frac{1}{2}e(e-1).$$

Exercice 15.

1. On a représenté ci-dessous la fonction g définie par $g(x) = 0,5x^2 + \frac{1}{x+3}$ sur $[0;2]$, dans un repère orthonormé.



À l'aide du graphique, donner un encadrement de $\int_0^2 g(x) dx$ sans calculer l'intégrale et en utilisant des rectangles.

primitives (calcul simple)

Exercice 15.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(g(0) + g\left(\frac{1}{2}\right) + g(1) + g\left(\frac{3}{2}\right) \right) &\leq \int_0^2 g(x) dx \leq \frac{1}{2} \left(g\left(\frac{1}{2}\right) + g(1) + g\left(\frac{3}{2}\right) + g(2) \right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{23}{56} + \frac{3}{4} + \frac{97}{72} \right) &\leq \int_0^2 g(x) dx \leq \frac{1}{2} \left(\frac{23}{56} + \frac{3}{4} + \frac{97}{72} + \frac{11}{5} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{179}{126} &\leq \int_0^2 g(x) dx \leq \frac{1483}{630}. \end{aligned}$$

Exercice 16.

Sans chercher à la calculer, donner le signe de chaque intégrale suivante.

1. $I = \int_0^1 e^{-x^3} dx$

2. $J = \int_3^1 (\ln(t))^4 dt$

3. $K = \int_{-2}^{-1} ue^u du$

4. $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt$

5. $L = \int_4^1 (1-x)\sqrt{x+1} dx$

propriétés de l'intégrale

Exercice 16.

1. Pour tout $x \in [0;1]$, $e^{-x^3} > 0$, donc $I \geq 0$.

2. Pour tout $x \in [1; 3]$, $(\ln(t))^4 > 0$ (puissance paire), donc $\int_1^3 (\ln(t))^4 dt \geq 0$.

$$\text{Or, } J = \int_3^1 (\ln(t))^4 dt = - \int_1^3 (\ln(t))^4 dt, \text{ d'où } J \leq 0.$$

3. Pour tout $u \in [-2; -1]$, $e^u > 0$ et $u < 0$. Donc $K \leq 0$.

4. Pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(t) \geq 0$. Donc $L \geq 0$.

5. Pour tout $x \in [1; 4]$, $(1-x) \leq 0$ et $\sqrt{x+1} > 0$, donc $\int_1^4 (1-x)\sqrt{x+1} dx \leq 0$.

$$\text{Or, } L = \int_4^1 (1-x)\sqrt{x+1} dx = - \int_1^4 (1-x)\sqrt{x+1} dx, \text{ d'où } L \geq 0.$$

Exercice 17.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$.

1. On pose $I_1 = \int_0^1 f(x) dx$.

Montrer que $I_1 = \frac{1}{2} \ln(2)$.

2. Soit $I_2 = \int_0^1 g(x) dx$.

Calculer $I_1 + I_2$ et en déduire la valeur de I_2 .

propriétés de l'intégrale

Exercice 17.

$$1. I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln(2).$$

$$\begin{aligned} 2. I_1 + I_2 &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x(1+x^2)}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où, } I_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2) = \frac{1}{2} (1 - \ln(2)).$$

Exercice 18.

1. Justifier que, pour tout x appartenant à $[0; 1]$:

$$\ln(1+x^2) \geq 0.$$

2. a. Déterminer le tableau de variation de la fonction g définie sur $[0; 1]$ par :

$$g(x) = \ln(1+x^2) - x^2.$$

b. En déduire le signe de g sur $[0; 1]$.

3. Déterminer alors un encadrement de :

$$I = \int_0^1 \ln(1+x^2) dx.$$

Exercice 18.

1. Pour tout $x \in [0; 1]$, $x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 + x^2 \geq 1 \Rightarrow \ln(1 + x^2) \geq 0$ car $\ln$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. a. La fonction g est définie et dérivable sur $[0; 1]$.

$$g'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 2x = \frac{2x - 2x - 2x^3}{1+x^2} = -\frac{2x^3}{1+x^2}.$$

Pour tout $x \in [0; 1]$, $g'(x) \leq 0$ donc g est décroissante sur $[0; 1]$. De plus $g(0) = 0$ et $g(1) = \ln(2) - 1$.

x	0	1
$g'(x)$	-	
$g(x)$	0	$\ln(2) - 1$

b. Du tableau précédent on déduit que pour tout $x \in [0; 1]$, $g(x) \leq 0$.

3. Pour tout $x \in [0; 1]$,

$$\begin{aligned} \ln(2) - 1 \leq g(x) \leq 0 &\Leftrightarrow \ln(2) - 1 \leq \ln(1 + x^2) - x^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(2) - 1 + x^2 \leq \ln(1 + x^2) \leq x^2 \\ &\Rightarrow \int_0^1 (\ln(2) - 1 + x^2) dx \leq \int_0^1 \ln(1 + x^2) dx \leq \int_0^1 x^2 dx \\ &\Rightarrow \left[x \ln(2) - x + \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \leq \int_0^1 \ln(1 + x^2) dx \leq \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \\ &\Rightarrow \ln(2) - \frac{2}{3} \leq \int_0^1 \ln(1 + x^2) dx \leq \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 19.

1. Montrer que la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x)$, est impaire.
2. À l'aide de la calculatrice, conjecturer une périodicité de la fonction, puis valider cette conjecture par le calcul.
3. a. Comparer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ et $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$.
b. Comparer $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx$ et $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$.

Exercice 19.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin(2x) = -f(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$ donc la fonction f est impaire.
2. Grâce à la calculatrice, on conjecture que f est périodique de période π . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + \pi) = \sin(2(x + \pi)) = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2x) = f(x)$. La fonction f est donc bien périodique de période π .
3. a. On remarque que $0 + \pi = \pi$ et que $\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$. Or, la fonction f est périodique de période π , donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx.$$

b. La fonction f est impaire donc $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$. Or, d'après la question précédente, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$ donc $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx = -\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$.

Exercice 20.

En utilisant une intégration par parties, calculer :

$$\int_0^{\pi} x \sin(x) dx.$$

IPP

Exercice 20.

On pose, pour tout $x \in [0; \pi]$, $v(x) = x$ et $u'(x) = \sin(x)$. On a donc pour tout $x \in [0; \pi]$, $v'(x) = 1$ et on peut choisir $u(x) = -\cos(x)$.

u et v sont dérivables sur $[0; \pi]$ et u' et v' sont continues sur $[0; \pi]$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \sin(x) dx &= [-x \cos(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos(x) dx \\ &= [-x \cos(x)]_0^{\pi} + [\sin(x)]_0^{\pi} \\ &= -\pi \cos(\pi) + \sin(\pi) - \sin(0) = \pi. \end{aligned}$$

Exercice 21.

En utilisant une intégration par parties, calculer :

$$\int_0^1 x e^x dx.$$

IPP

Exercice 21.

On pose, pour tout $x \in [0; 1]$, $v(x) = x$ et $u'(x) = e^x$. On a donc pour tout $x \in [0; 1]$, $v'(x) = 1$ et on peut choisir $u(x) = e^x$.

u et v sont dérivables sur $[0; 1]$ et u' et v' sont continues sur $[0; 1]$.

$$\int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

Exercice 22.

En utilisant une intégration par parties, calculer :

$$\int_1^e x \ln(x) dx.$$

IPP

Exercice 22.

On pose, pour tout $x \in [1; e]$, $v(x) = \ln(x)$ et $u'(x) = x$. On a donc pour tout $x \in [1; e]$, $v'(x) = \frac{1}{x}$ et on peut choisir $u(x) = \frac{1}{2}x^2$.

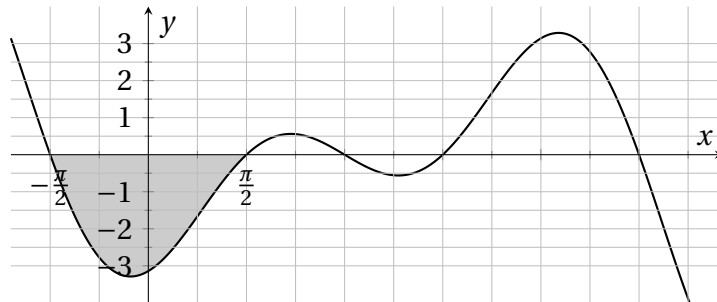
u et v sont dérivables sur $[1; e]$ et u' et v' sont continues sur $[1; e]$.

$$\int_1^e x \ln(x) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} x^2 \times \frac{1}{x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} x \, dx \\
&= \frac{e^2}{2} \ln(e) - \frac{1}{2} \ln(1) - \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_1^e \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice 23.

La courbe ci-dessous est celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - \pi) \cos(x)$.



1. Justifier que f est négative sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Calculer, en unité d'aire du repère, l'aire du domaine coloré à l'aide d'une intégration par parties.

aire

Exercice 23.

1. Sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est positive. Sur le même intervalle, la fonction $x \mapsto x - \pi$ est négative. Sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction $f : x \mapsto (x - \pi) \cos(x)$ est donc négative.

$$2. - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x - \pi) \cos(x) \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\pi - x) \cos(x) \, dx.$$

On pose, pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $v(x) = \pi - x$ et $u'(x) = \cos(x)$. On a donc pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $v'(x) = -1$ et on peut choisir $u(x) = \sin(x)$.

u et v sont dérivables sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et u' et v' sont continues sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

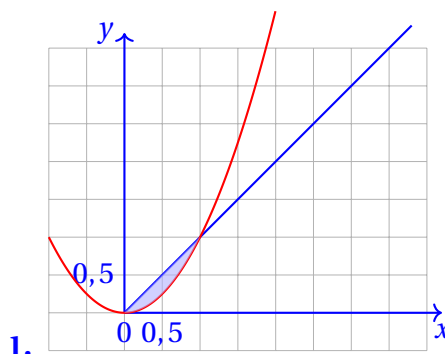
$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\pi - x) \cos(x) \, dx &= [(\pi - x) \sin(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \, dx \\
&= [(\pi - x) \sin(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + [-\cos(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\
&\quad - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 2\pi.
\end{aligned}$$

L'aire du domaine est donc de 2π u.a.

Exercice 24.

1. Dans un repère orthonormé, représenter le domaine du plan compris entre la courbe représentative de la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, et les droites d'équations $y = x$, $x = 0$ et $x = 1$.
2. Calculer l'aire de ce domaine en unité d'aire du repère.

Exercice 24.



2. Sur $[0; 1]$, $x - x^2 = x(1 - x) \geq 0$.

$$\int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

L'aire de ce domaine vaut donc $\frac{1}{6}$ u.a.

Exercice 25.

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - x - 12 \text{ et } g(x) = 4x - 16.$$

- Déterminer le signe de $f(x) - g(x)$ selon les valeurs de x .
- En déduire, en unité d'aire d'un repère orthonormé, l'aire du domaine délimité par les courbes représentatives des fonctions f et g et les droites d'équations :

a. $x = 5$ et $x = 6$; b. $x = 2$ et $x = 3$.

Exercice 25.

1. $f(x) - g(x) = x^2 - x - 12 - (4x - 16) = x^2 - 5x + 4$.

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$, $\Delta > 0$, le trinôme $x^2 - 5x + 4$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$, $x_1 = \frac{5-3}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{5+3}{2} = 4$.

Comme $a = 1 \geq 0$, la parabole représentant la fonction $f - g$ est tournée vers le haut. Ainsi,

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$f(x) - g(x)$	+	0	-	0	+

2. a.

$$\int_5^6 f(x) - g(x) dx = \int_5^6 x^2 - 5x + 4 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x \right]_5^6 = 6 - \left(-\frac{5}{6} \right) = \frac{41}{6}.$$

L'aire de ce domaine est donc de $\frac{41}{6}$ u.a.

b.

$$\int_2^3 g(x) - f(x) dx = \int_2^3 -x^2 + 5x - 4 dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x \right]_2^3 = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6}.$$

L'aire de ce domaine est donc de $\frac{13}{6}$ u.a.

Exercice 26.

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 2 \text{ et } g(x) = x^2 - 4x + 3.$$

1. Montrer que $f(x) - g(x) = (x - 1)(x + 5)$.
2. En déduire le tableau de signes de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. On se place dans un repère orthonormé. Déterminer, en unité d'aire du repère, l'aire du domaine délimité par les courbes représentatives des fonctions f et g et les droites d'équations :

a. $x = -2$ et $x = 1$; **b.** $x = 2$ et $x = 3$.

aire entre deux courbes
Exercice 26.

1. $f(x) - g(x) = 2x^2 - 2 - (x^2 - 4x + 3) = x^2 + 4x - 5$. Or $(x - 1)(x + 5) = x^2 + 5x - x - 5 = x^2 + 4x - 5$. On a donc bien $f(x) - g(x) = (x - 1)(x + 5)$.

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$		$-$	0		$+$
$x + 5$		$-$	0	$+$	$+$		
$f(x) - g(x)$		$+$	0	$-$	0		$+$

2.

3. **a.**

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 g(x) - f(x) dx &= \int_{-2}^1 -x^2 - 4x + 5 dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x \right]_{-2}^1 = -\frac{1}{3} - 2 + 5 \\ &\quad - \left(-\frac{1}{3}(-2)^3 - 2(-2)^2 + 5(-2) \right) = 18. \end{aligned}$$

L'aire de ce domaine vaut donc 18 u.a.

- b.**

$$\int_2^3 f(x) - g(x) dx = \int_2^3 x^2 + 4x - 5 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x \right]_2^3 = \frac{34}{3}.$$

L'aire de ce domaine vaut donc $\frac{34}{3}$ u.a.

Exercice 27.

Soit f la fonction définie sur $[3; 7]$ par $f(x) = \frac{6}{x^2}$.
Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[3; 7]$.

valeur moyenne
Exercice 27.

$$V_m = \frac{1}{7-3} \int_3^7 f(x) dx = \frac{1}{4} \int_3^7 \frac{6}{x^2} dx = \frac{1}{4} \left[-\frac{6}{x} \right]_3^7 = \frac{1}{4} \left(-\frac{6}{7} + \frac{6}{3} \right) = \frac{2}{7}.$$

Exercice 28.

Calculer la valeur moyenne de la fonction exponentielle sur l'intervalle $[0; 2]$. En donner une valeur approchée au centième.

valeur moyenne

Exercice 28.

$$V_m = \frac{1}{2} \int_0^2 e^x dx = \frac{1}{2} [e^x]_0^2 = \frac{1}{2} (e^2 - 1) \approx 3,19.$$

Exercice 29.

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = (2x^2 - x + 1)e^{-x}.$$

Calculer $h'(x)$.

2. En déduire la valeur moyenne sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ de la fonction f définie par $f(x) = (-2x^2 + 5x - 2)e^{-x}$. En donner une valeur approchée au millièm.

valeur moyenne

Exercice 29.

1. $h'(x) = (4x - 1)e^{-x} - (2x^2 - x + 1)e^{-x}$

$$= (-2x^2 + 5x - 2)e^{-x}.$$

2. $h' = f$ donc h est une primitive de f sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

$$\begin{aligned} V_m &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = 2 \left[(2x^2 - x + 1)e^{-x} \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= 2 \left(2e^{-1} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 \right) e^{-\frac{1}{2}} \right) \\ &= 4e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{e} - \frac{2}{\sqrt{e}} \approx 0,258. \end{aligned}$$

Exercice 30.

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = (2x^2 - x + 1)e^{-x}.$$

Calculer $h'(x)$.

2. En déduire la valeur moyenne sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ de la fonction f définie par $f(x) = (-2x^2 + 5x - 2)e^{-x}$. En donner une valeur approchée au millièm.

valeur moyenne

Exercice 30.

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{2x+1}{x+1} - \frac{2x-3}{x-2} \\ f(x) - g(x) &= \frac{(2x+1)(x-2) - (2x-3)(x+1)}{(x+1)(x-2)} \\ f(x) - g(x) &= \frac{2x^2 - 4x + x - 2 - 2x^2 - 2x + 3x + 3}{(x+1)(x-2)} \\ f(x) - g(x) &= \frac{-2x+1}{(x+1)(x-2)} \end{aligned}$$

x	3	7
$-2x + 1$	-	
$x + 1$	+	
$x - 2$	+	
$\frac{-2x + 1}{(x + 1)(x - 2)}$	-	

Ainsi, l'aire cherchée, en unité d'aire du repère, est donnée par

$$\int_3^7 g(x) - f(x) dx.$$

$$\int_3^7 g(x) - f(x) dx = \int_3^7 \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2} dx = [\ln(x^2 - x - 2)]_3^7$$

$$= \ln(40) - \ln(4) = \ln\left(\frac{40}{4}\right) = \ln(10)$$

Ainsi l'aire du domaine délimité par les courbes de f et de g et les droites d'équations $x = 3$ et $x = 7$ vaut $\ln(10)$ u.a. soit $4\ln(10) \text{ cm}^2$.

Exercice 31.

1. On considère les intégrales :

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos(x) dx \text{ et } S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin(x) dx.$$

1. En effectuant deux intégrations par parties successives, démontrer que $C = \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}$.
2. a. En utilisant la démonstration précédente, exprimer S en fonction de C .
b. En déduire la valeur de S .

IPP

Exercice 31.

1. On pose, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $v(x) = e^{-x}$ et $u'(x) = \cos(x)$. On a donc pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $v'(x) = -e^{-x}$ et on peut choisir $u(x) = \sin(x)$.
 u et v sont dérivables sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et u' et v' sont continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$C = [\sin(x)e^{-x}]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^{-x} dx = e^{-\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^{-x} dx.$$

On pose, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $v(x) = e^{-x}$ et $u'(x) = \sin(x)$.

On a donc pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $v'(x) = -e^{-x}$ et on peut choisir $u(x) = -\cos(x)$.

u et v sont dérivables sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et u' et v' sont continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$C = e^{-\frac{\pi}{2}} + [-\cos(x)e^{-x}]_0^{\frac{\pi}{2}} - C \Leftrightarrow 2C = e^{-\frac{\pi}{2}} + 1 \Leftrightarrow C = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} + 1}{2}.$$

2. a. D'après la question précédente,

$$C = e^{-\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^{-x} dx = e^{-\frac{\pi}{2}} + S, \text{ ainsi } S = C - e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

b.

$$S = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} + 1}{2} - e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1 - e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}.$$

Exercice 32.

1. On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

1. Tracer sur une feuille à grands carreaux (carrés de 0,8 cm de côté) l'allure de la courbe représentative de f en prenant comme unité 2 grands carreaux sur chaque axe.

2. On pose $I = \int_1^4 f(x) dx$.

a. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

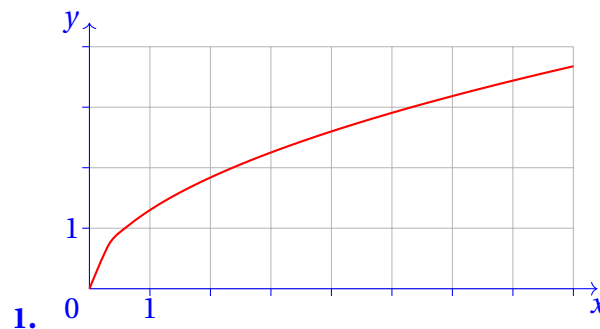
$$I = 7 - \frac{1}{2}I.$$

b. Déterminer la valeur de I .

3. En déduire l'aire, en cm^2 , de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$, et la courbe représentative de f .

IPP

Exercice 32.



2. a. On pose, pour tout $x \in [1; 4]$, $v(x) = \sqrt{x}$ et $u'(x) = 1$. On a donc pour tout $x \in [1; 4]$, $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et on peut choisir $u(x) = x$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1; 4]$ et u' et v' sont continues sur $[1; 4]$.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^4 f(x) dx = [x\sqrt{x}]_1^4 - \int_1^4 \frac{x}{2\sqrt{x}} dx \\ &= [x\sqrt{x}]_1^4 - \frac{1}{2} \times \int_1^4 \sqrt{x} dx = 7 - \frac{1}{2}I. \end{aligned}$$

$$\text{b. } I = 7 - \frac{1}{2}I \Leftrightarrow \frac{3}{2}I = 7 \Leftrightarrow I = \frac{14}{3}.$$

3. La fonction f est strictement positive et continue sur l'intervalle $[1; 4]$, on a donc :

$$\mathcal{A} = \frac{14}{3} \text{ u.a.} = \frac{14}{3} \times 1,6 \times 1,6 \text{ cm}^2 = \frac{896}{75} \text{ cm}^2.$$

Exercice 33.

1. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t} dt$.

1. Calculer u_1 .

2. Simplifier puis calculer $u_0 + u_1$.

3. En déduire la valeur de u_0 .

4. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , on a : $u_n + u_{n+1} = \frac{e^n - 1}{n}$.

5. Calculer les valeurs exactes de u_2 , u_3 et u_4 .

6. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , on a : $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}(e^t - 1)}{1 + e^t} dt$.

7. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

suites d'intégrales

Exercice 33.

1.

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt = [\ln(e^t + 1)]_0^1 = \ln(e + 1) - \ln(2) \\ &= \ln\left(\frac{e+1}{2}\right). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 &= \int_0^1 \frac{1}{1+e^t} dt + \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt = \int_0^1 \frac{1+e^t}{1+e^t} dt \\ &= \int_0^1 1 dt = [t]_0^1 = 1 \end{aligned}$$

3. D'où $u_0 = 1 - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_n + u_{n+1} &= \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t} dt + \int_0^1 \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t} dt \\ u_n + u_{n+1} &= \int_0^1 \frac{e^{nt} + e^{(n+1)t}}{1+e^t} dt = \int_0^1 \frac{e^{nt}(1+e^t)}{1+e^t} dt \\ u_n + u_{n+1} &= \int_0^1 e^{nt} dt = \left[\frac{1}{n}e^{nt}\right]_0^1 = \frac{e^n - 1}{n}. \end{aligned}$$

5. Pour $n = 1$, on obtient $u_1 + u_2 = e - 1$.

$$\text{D'où } u_2 = e - 1 - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

Pour $n = 2$, on obtient $u_2 + u_3 = \frac{e^2 - 1}{2}$, d'où

$$u_3 = \frac{e^2 - 1}{2} - e + 1 + \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

Pour $n = 3$, on obtient $u_3 + u_4 = \frac{e^3 - 1}{3}$, d'où

$$u_4 = \frac{e^3 - 1}{3} - \frac{e^2 - 1}{2} + e - 1 + \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t} dt - \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^{(n+1)t} - e^{nt}}{1+e^t} dt = \int_0^1 \frac{e^{nt}(e^t - 1)}{1+e^t} dt. \end{aligned}$$

7. Pour tout $t \in [0, 1]$, $e^{nt} > 0$, $1 + e^t > 0$ et $e^t - 1 \geq 0$, donc

$$\int_0^1 \frac{e^{nt}(e^t - 1)}{1 + e^t} dt \geq 0.$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

Exercice 34.

1. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^n t\sqrt{t^2 + 1} dt$.

1. a. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , on a $u_{n+1} - u_n = \int_n^{n+1} t\sqrt{t^2 + 1} dt$.

b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

2. On considère la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = (t^2 + 1)\sqrt{t^2 + 1}.$$

a. Démontrer que, pour tout réel t , $f'(t) = 3t\sqrt{t^2 + 1}$.

b. En déduire une expression explicite de u_n en fonction de n .

c. La suite (u_n) est-elle convergente?

3. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$v_n = \int_0^n \frac{t^3}{\sqrt{t^2 + 1}} dt.$$

a. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}$.

b. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties et pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de u_n puis en fonction de n .

c. Calculer $\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{t^2 + 1}} dt$.

suites d'intégrales

Exercice 34.

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} t\sqrt{t^2 + 1} dt - \int_0^n t\sqrt{t^2 + 1} dt$$

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} t\sqrt{t^2 + 1} dt + \int_n^0 t\sqrt{t^2 + 1} dt$$

$$u_{n+1} - u_n = \int_n^{n+1} t\sqrt{t^2 + 1} dt.$$

b. Sur l'intervalle $[n; n + 1]$ la fonction $t \mapsto t\sqrt{t^2 + 1}$ est positive.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_n^{n+1} t\sqrt{t^2 + 1} dt \geq 0$ et par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} - u_n \geq 0$. Donc la suite (u_n) est croissante.

2. a.

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2t\sqrt{t^2 + 1} + (t^2 + 1) \times \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} \\ &= 2t\sqrt{t^2 + 1} + t\sqrt{t^2 + 1} \\ &= 3t\sqrt{t^2 + 1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n &= \int_0^n t \sqrt{t^2 + 1} \, dt = \left[\frac{1}{3} (t^2 + 1) \sqrt{t^2 + 1} \right]_0^n \\ &= \frac{1}{3} ((n^2 + 1) \sqrt{n^2 + 1} - 1). \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 1 = +\infty$ donc par composition, produit et somme,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. La suite (u_n) est donc divergente.

3. a. La fonction $t \mapsto \sqrt{t^2 + 1}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}$.

Exercice 35.

1. On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} \, dx$.

1. Montrer que la suite (I_n) est une suite décroissante.

2. Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

3. Que peut-on en déduire pour la suite (I_n) ?

suites d'intégrales

Exercice 35.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{x^2} \, dx - \int_0^1 x^n e^{x^2} \, dx = \int_0^1 x^{n+1} e^{x^2} - x^n e^{x^2} \, dx$$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} (x - 1) \, dx$$

Sur l'intervalle $[0; 1]$, la fonction $x \mapsto x^n e^{x^2} (x - 1)$ est négative.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^n e^{x^2} (x - 1) \, dx \leq 0$ et par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n \leq 0$. La suite (I_n) est donc décroissante.

2. Soit $x \in [0; 1]$,

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \xrightarrow{\text{exp croissante}} 1 \leq e^{x^2} \leq e \xrightarrow{x^n \geq 0} x^n \leq x^n e^{x^2} \leq e x^n$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^n \, dx \leq I_n \leq \int_0^1 e x^n \, dx \Rightarrow \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \leq I_n \leq \left[\frac{e x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$. La suite (I_n) converge donc vers 0.

Exercice 36.

Partie A

1. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln(x).$$

a. Dresser le tableau de variation de g .

b. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique λ , puis que : $1,89 < \lambda < 1,90$.

c. Dédire de ce qui précède le signe de $g(x)$.

2. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}.$$

a. Dresser le tableau de variation de f .

b. Vérifier que $f(\lambda) = \frac{1}{2\lambda^2}$.

En déduire un encadrement de $f(\lambda)$ d'amplitude 2×10^{-3} .

c. Tracer la représentation graphique de f dans un plan rapporté à un repère orthogonal en prenant 2 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 20 cm pour unité sur l'axe des ordonnées.

Partie B

On considère la fonction F définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

1. Montrer que F est dérivable sur $[1; +\infty[$ et préciser l'expression de $F'(x)$ pour $x \in [1; +\infty[$. En déduire le sens de variation de F .

2. a. Vérifier que, pour $t \geq 1$, on a :

$$\frac{\ln(t)}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln(t)}{t^2}.$$

b. Pour $x \geq 1$, on pose :

$$I(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} dt.$$

À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(x)$.

c. Pour $x \geq 1$, on pose $J(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$. À l'aide d'une intégration par parties et de l'égalité :

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \text{ pour } t \geq 1,$$

calculer $J(x)$.

d. Dédire de ce qui précède que, pour $x \geq 1$, on a :

$$\ln(2) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln(x)}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}.$$

e. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ell$, avec ℓ réel. Sans calculer ℓ , vérifier que $\ln(2) \leq \ell \leq 1$.

3. Soit G la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$G(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) - F(x).$$

a. Calculer $G'(x)$ pour $x \geq 1$.

b. Vérifier que, pour tout $x \geq 1$, $G(x) = 0$.

c. En déduire une relation que vérifie la fonction F .

bac

Exercice 36.

PARTIE A

1. a. La fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g'(x) = 2x - 4x \ln(x) - 2x^2 \times \frac{1}{x} = -4x \ln(x)$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $-4x < 0$. Donc $g'(x)$ est du signe opposé de $\ln(x)$. Or, pour tout $x \in]0; 1]$, $\ln(x) \leq 0$ et pour tout $x \in [1; +\infty[$, $\ln(x) \geq 0$. On en déduit le tableau de variation de g :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -
$g(x)$	1	↗ 2 ↘	$-\infty$

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 + x^2 = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0 \text{ par croissance comparée et } \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0.$$

Donc par produit et par somme $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + x^2 - 2x^2 \ln(x) = 1$.

$$g(x) = x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 - 2 \ln(x) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} + 1 - 2 \ln(x) = -\infty.$$

Donc, par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 - 2 \ln(x) \right) = -\infty$.

- b. Sur l'intervalle $]0; 1]$ la fonction g est strictement croissante et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$. Ainsi, pour tout $x \in]0; 1]$, $g(x) > 1$. L'équation $g(x) = 0$ n'admet donc aucune solution sur $]0; 1]$. Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, la fonction g est continue et strictement décroissante. $g(1) = 2 > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution λ sur l'intervalle $[1; +\infty[$. Conclusion : l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution λ . À la calculatrice, on trouve que $g(1,89) > 0$ et $g(1,90) < 0$ donc $1,89 < \lambda < 1,90$.

- c. On a donc :

x	0	λ	$+\infty$
$g(x)$		+	0 -

2. a. La fonction f est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x \ln(x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2 \ln(x)}{x(1+x^2)^2} = \frac{g(x)}{x(1+x^2)}.$$

De la question 1.c on déduit le tableau de variation de g suivant :

x	0	λ	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		↗ $\frac{1}{2\lambda^2}$ ↘	

$$\lambda \neq 0$$

b. $g(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \ln(\lambda) = \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda^2}$

$$f(\lambda) = \frac{\ln(\lambda)}{1 + \lambda^2} = \frac{\frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda^2}}{1 + \lambda^2} = \frac{1}{2\lambda^2}.$$

Or $1,89 < \lambda < 1,90$

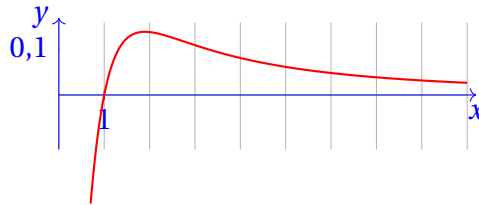
$$\Rightarrow 3,5721 < \lambda^2 < 3,61$$

$$\Rightarrow 7,1442 < 2\lambda^2 < 7,22$$

Donc $\frac{1}{7,22} < \frac{1}{2\lambda^2} < \frac{1}{7,1442}$

$$\Rightarrow 0,138 < \frac{1}{2\lambda^2} < 0,140$$

c. Voir ci-dessous.



PARTIE B

1. F est dérivable sur $[1; +\infty[$ par le théorème fondamental de l'intégration et pour tout $x \in [1; +\infty[$, $F'(x) = f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$. Or, pour tout x , $1+x^2 > 0$ donc $f(x)$ est du même signe que $\ln(x)$. Sur l'intervalle $]0; 1]$, la fonction f est donc négative et par suite la fonction F est décroissante. De même, sur l'intervalle $[1; +\infty[$, la fonction f est positive et par suite, la fonction F est croissante.

2. a. Soit $t \geq 1$. On a

$$0 < t^2 \leq 1 + t^2 \stackrel{2t \geq 0}{\Rightarrow} 1 + 2t + t^2 \Rightarrow \frac{1}{(1+t)^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

$$\ln(t) \geq 0 \Rightarrow \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} \leq \frac{\ln(t)}{1+t^2} \leq \frac{\ln(t)}{t^2} \quad \text{soit} \quad \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln(t)}{t^2}$$

b. Soit $x \geq 1$. On pose, pour tout $t \in [1; +\infty[$, $v(t) = \ln(t)$ et $u'(t) = \frac{1}{t^2}$. On a donc pour tout $t \in [1; +\infty[$, $v'(t) = \frac{1}{t}$ et on peut choisir $u(t) = -\frac{1}{t}$.
 u et v sont dérivables sur $[1; +\infty[$ et u' et v' sont continues sur $[1; +\infty[$

$$\begin{aligned} I(x) &= \left[-\frac{1}{t} \ln(t) \right]_1^x - \int_1^x -\frac{1}{t} \times \frac{1}{t} dt = \frac{\ln(x)}{x} - \left[\frac{1}{t} \right]_1^x \\ &= -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + 1 = \frac{x - \ln(x) - 1}{x} \end{aligned}$$

c. Soit $x \geq 1$. On pose, pour tout $t \in [1; +\infty[$, $v(t) = \ln(t)$ et $u'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$. On a donc pour tout $t \in [1; +\infty[$, $v'(t) = \frac{1}{t}$ et on peut choisir $u(t) = -\frac{1}{1+t}$.

u et v sont dérivables sur $[1; +\infty[$ et u' et v' sont continues sur $[1; +\infty[$.

$$\begin{aligned} J(x) &= \left[-\frac{1}{1+t} \ln(t) \right]_1^x - \int_1^x -\frac{1}{t} \times \frac{1}{1+t} dt \\ &= -\frac{\ln(x)}{1+x} + [\ln(t) - \ln(t+1)]_1^x \\ J(x) &= -\frac{\ln(x)}{1+x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \ln(2). \end{aligned}$$

- d.** $\frac{\ln(t)}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln(t)}{t^2}$, d'après **2.a.** et la propriété de croissance de l'intégrale on obtient :

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt \leq \int_1^x f(t) dt \leq \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} dt \quad \text{soit} \quad J(x) \leq F(x) \leq I(x).$$

Donc d'après la question **2.b.** et la question **2.c.** on a :

$$\ln(2) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln(x)}{1+x} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$$

- e.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$ et $\lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) = 0$, donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$.

$$\frac{\ln(x)}{x+1} = \frac{x}{x+1} \frac{\ln(x)}{x}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée.

Donc par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x+1} = 0$.

Ainsi, par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln(x)}{1+x} = \ln(2)$.

On a également $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc par somme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} = 1.$$

Par le théorème d'encadrement, on a $\ln(2) \leq l \leq 1$.

- 3. a.** Pour tout $x \in [1; +\infty[$,

$$\begin{aligned} G'(x) &= -\frac{1}{x^2} F'\left(\frac{1}{x}\right) - F'(x) = -\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) \\ &= -\frac{1}{x^2} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} - \frac{\ln(x)}{1+x^2} = \frac{\ln(x)}{1+x^2} - \frac{\ln(x)}{1+x^2} = 0 \end{aligned}$$

- b.** De la question précédente on déduit que la fonction G est constante sur $[1; +\infty[$. De plus $G(1) = F(1) - F(1) = 0$. Donc pour tout $x \geq 1$, $G(x) = 0$.

- c.** F vérifie la relation : $\forall x \in [1; +\infty[, F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$.