

EXERCICES

Limites de fonctions

Mots clés : limites simples, forme indéterminée, factorisation, asymptotes verticales, étude complète, asymptotes, lecture graphique, limites composées, conjugué, exponentielle

Exercice 1.

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto 3x^2 - 1$

3. $x \mapsto 2x^3 + x + 1$

2. $x \mapsto 5 - 2x$

4. $x \mapsto e^x + \frac{1}{x}$

limites simples

Exercice 1.

1.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 - 1) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 1) = +\infty.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (5 - 2x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (5 - 2x) = -\infty.$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + x + 1) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 + x + 1) = +\infty.$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + \frac{1}{x} = 0.$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + \frac{1}{x} = +\infty.$

Exercice 2.

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto (x^2 + 1)(3 - 4x)$

3. $x \mapsto (2x + 1)(5 - 4x)$

2. $x \mapsto -2e^x + 3 + \frac{5}{x}$

4. $x \mapsto -x + \frac{2}{3x^2}$

limites simples

Exercice 2.

1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 4x) = -\infty.$$

Donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)(3 - 4x) = -\infty.$

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)(3 - 4x) = +\infty.$

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2e^x + 3) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = 0.$$

Donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2e^x + 3 + \frac{5}{x} \right) = -\infty.$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2e^x + 3) = 3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} = 0.$$

Donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2e^x + 3 + \frac{5}{x} \right) = 3.$

3.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (5 - 4x) = -\infty.$$

Donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1)(5 - 4x) = -\infty.$

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1)(5 - 4x) = -\infty.$

4.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3x^2} = 0.$$

Donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + \frac{2}{3x^2} \right) = -\infty.$

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x + \frac{2}{3x^2} \right) = +\infty.$

Exercice 3.

On s'intéresse aux limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes. Dans chaque cas, indiquer s'il s'agit ou non d'une forme indéterminée, sans chercher à déterminer les limites.

1. $x \mapsto x^2 + x - 1$

2. $x \mapsto 2x^3 + x^2 - x - 1$

3. $x \mapsto (2x + 1)x^2$

4. $x \mapsto \frac{-2}{x + 1}$

5. $x \mapsto \frac{2x + 1}{e^x}$

6. $x \mapsto e^x + 1 + \frac{1}{x}$

forme indéterminée

Exercice 3.

1. Non en $+\infty$ et oui en $-\infty$.

2. Oui en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Non en $+\infty$ et en $-\infty$.

4. Non en $+\infty$ et en $-\infty$.

5. Oui en $+\infty$ et non en $-\infty$.

6. Non en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 4.

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions polynômes suivantes.

1. $x \mapsto 7x^2 - 2x + 4$

2. $x \mapsto -2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x$

3. $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1$

4. $x \mapsto -2x^4 - 7x + 5$

forme indéterminée, factorisation

Exercice 4.

1.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 7x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 4) = +\infty.$$

Donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^2 - 2x + 4) = +\infty$.

$$7x^2 - 2x + 4 = 7x^2 \left(1 - \frac{2}{7x} + \frac{4}{7x^2} \right).$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} 7x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{7x} + \frac{4}{7x^2} \right) = 1$.

Donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7x^2 - 2x + 4) = +\infty$.

2.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty.$$

Donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x \right) = +\infty$.

$$-2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x = -2x^3 \left(1 - \frac{1}{4x} + \frac{1}{2x^2} \right).$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{4x} + \frac{1}{2x^2} \right) = 1$.

Donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x \right) = -\infty$.

3.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}x^2 \right) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{3}x - 1 \right) = -\infty.$$

Donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1 \right) = -\infty$.

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 \left(1 - \frac{4}{3x} + \frac{2}{x^2} \right),$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x^2 \right) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{3x} + \frac{2}{x^2} \right) = 1$.

Donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1 \right) = -\infty$.

4.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^4) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-7x + 5) = -\infty.$$

Donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^4 - 7x + 5) = -\infty$.

$$-2x^4 - 7x + 5 = -2x^4 \left(1 + \frac{7}{2x^3} - \frac{5}{2x^4} \right).$$

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^4) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{7}{2x^3} - \frac{5}{2x^4} \right) = 1$.

Donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^4 - 7x + 5) = -\infty$.

Exercice 5.

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes, appelées fonctions rationnelles (le numérateur et le dénominateur sont des fonctions polynômes).

1. $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

3. $x \mapsto \frac{-3x-1}{6-x}$

2. $x \mapsto \frac{4x+3}{-2x+1}$

4. $x \mapsto \frac{-3-8x}{5-x}$

Exercice 5.

1.

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right) = 1$. Donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1$.

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1$.

2.

$$\frac{4x+3}{-2x+1} = \frac{4x\left(1+\frac{3}{4x}\right)}{-2x\left(1-\frac{1}{2x}\right)} = \frac{-2\left(1+\frac{3}{4x}\right)}{1-\frac{1}{2x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -2\left(1+\frac{3}{4x}\right) = -2$$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1-\frac{1}{2x}\right) = 1$.

Donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x+3}{-2x+1}\right) = -2$.

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x+3}{-2x+1}\right) = -2$.

3.

$$\frac{-3x-1}{6-x} = \frac{-3x\left(1+\frac{1}{3x}\right)}{-x\left(1-\frac{6}{x}\right)} = \frac{3\left(1+\frac{1}{3x}\right)}{1-\frac{6}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 3\left(1+\frac{1}{3x}\right) = 3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1-\frac{6}{x}\right) = 1.$$

Donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x-1}{6-x}\right) = 3$.

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-3x-1}{6-x}\right) = 3$.

4.

$$\frac{-3-8x}{5-x} = \frac{-8x\left(1+\frac{3}{8x}\right)}{-x\left(1-\frac{5}{x}\right)} = \frac{8\left(1+\frac{3}{8x}\right)}{1-\frac{5}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 8\left(1+\frac{3}{8x}\right) = 8 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1-\frac{5}{x}\right) = 1.$$

Donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3-8x}{5-x}\right) = 8$.

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-3-8x}{5-x}\right) = 8$.

Exercice 6.

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions rationnelles suivantes.

1. $x \mapsto \frac{x^2+1}{1-x}$

3. $x \mapsto \frac{-3x-1}{-5x^2+x-2}$

2. $x \mapsto \frac{x+3}{-2x^2+1}$

4. $x \mapsto \frac{4x^3-3x-1}{-x^2+x+1}$

forme indéterminée, factorisation

Exercice 6.

1.

$$\frac{x^2+1}{1-x} = \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{-x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{-x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{1-\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right) = 1$. Donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{1-x}\right) = -\infty$.

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+1}{1-x}\right) = +\infty$.

2.

$$\frac{x+3}{-2x^2+1} = \frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{-2x^2\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)} = \frac{1+\frac{3}{x}}{-2x\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x\left(1-\frac{1}{2x^2}\right) = -\infty.$$

Donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{-2x^2+1}\right) = 0$.

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+3}{-2x^2+1}\right) = 0$.

3.

$$\frac{-3x-1}{-5x^2+x-2} = \frac{-3x\left(1+\frac{1}{3x}\right)}{-5x^2\left(1-\frac{1}{5x}+\frac{2}{5x^2}\right)} = \frac{-3\left(1+\frac{1}{3x}\right)}{-5x\left(1-\frac{1}{5x}+\frac{2}{5x^2}\right)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -3\left(1+\frac{1}{3x}\right) = -3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x\left(1-\frac{1}{5x}+\frac{2}{5x^2}\right) = -\infty.$$

Donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x-1}{-5x^2+x-2}\right) = 0$.

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-3x-1}{-5x^2+x-2}\right) = 0$.

4.

$$\frac{4x^3-3x-1}{-x^2+x+1} = \frac{4x^3\left(1-\frac{3}{4x^2}-\frac{1}{4x^3}\right)}{-x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{-4x\left(1-\frac{3}{4x^2}-\frac{1}{4x^3}\right)}{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -4x\left(1-\frac{3}{4x^2}-\frac{1}{4x^3}\right) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = 1.$$

Donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^3-3x-1}{-x^2+x+1}\right) = -\infty$.

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x^3-3x-1}{-x^2+x+1}\right) = -\infty$.

Exercice 7.

Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto xe^x \sqrt{x}$.

2. $x \mapsto x - \sqrt{x}$. On factorisera par $\sqrt{x}$.

3. $x \mapsto \frac{2x+1}{\sqrt{x}}$. On factorisera le numérateur par $\sqrt{x}$.

4. $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x+1}$. On factorisera le dénominateur par $\sqrt{x}$.

forme indéterminée, factorisation

Exercice 7.

1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

Donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x \sqrt{x} = +\infty$.

2.

$$x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1). \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - 1) = +\infty.$$

Donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x}) = +\infty$.

3.

$$\frac{2x+1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty.$

4.

$$\frac{\sqrt{x}}{x+1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Donc, par passage à l'inverse, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) = 0.$

Exercice 8.

Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{1}{x-3}$

3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{2}{1-x}$

2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{1}{x-3}$

4. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{2}{1-x}$

limites simples, asymptotes verticales

Exercice 8.

1.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} (x-3) = 0. \text{ Lorsque } x > 3, \text{ alors } x-3 > 0.$$

Donc, par quotient, $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \left(\frac{1}{x-3}\right) = +\infty.$

2.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} (x-3) = 0. \text{ Lorsque } x < 3, \text{ alors } x-3 < 0.$$

Donc, par quotient, $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \left(\frac{1}{x-3}\right) = -\infty.$

3.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (1-x) = 0. \text{ Lorsque } x > 1, \text{ alors } 1-x < 0.$$

Donc, par quotient, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{2}{1-x}\right) = -\infty.$

4.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (1-x) = 0. \text{ Lorsque } x < 1, \text{ alors } 1-x > 0.$$

Donc, par quotient, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{2}{1-x}\right) = +\infty.$

Exercice 9.

Déterminer les limites suivantes.

$$1. \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{-3x}{2x-4}$$

$$2. \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{-3x}{2x-4}$$

$$3. \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{x^2-10}{6-2x}$$

$$4. \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{x^2-10}{6-2x}$$

limites simples, asymptotes verticales

Exercice 9.

1.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (-3x) = -6 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (2x-4) = 0. \text{ Lorsque } x > 2, \text{ alors } 2x-4 > 0.$$

$$\text{Donc, par quotient, } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left(\frac{-3x}{2x-4} \right) = -\infty.$$

2.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (-3x) = -6 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (2x-4) = 0. \text{ Lorsque } x < 2, \text{ alors } 2x-4 < 0.$$

$$\text{Donc, par quotient, } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \left(\frac{-3x}{2x-4} \right) = +\infty.$$

3.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} (x^2-10) = -1 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} (6-2x) = 0. \text{ Lorsque } x > 3, \text{ alors } 6-2x < 0.$$

$$\text{Donc, par quotient, } \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \left(\frac{x^2-10}{6-2x} \right) = +\infty.$$

4.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} (x^2-10) = -1 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} (6-2x) = 0. \text{ Lorsque } x < 3, \text{ alors } 6-2x > 0.$$

$$\text{Donc, par quotient, } \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \left(\frac{x^2-10}{6-2x} \right) = -\infty.$$

Exercice 10.

Déterminer les limites suivantes.

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-2x}{(4x-2)^2}$$

limites simples, asymptotes verticales

Exercice 10.

1.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0 \text{ et pour tout } x \neq 1, (x-1)^2 > 0.$$

$$\text{Donc, par quotient, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (-2x) = -1, \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (4x-2)^2 = 0 \text{ et pour tout } x \neq \frac{1}{2},$$

$$(4x-2)^2 > 0. \text{ Donc, par quotient, } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-2x}{(4x-2)^2} = -\infty.$$

Exercice 11.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 5.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction f .
2. Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f et vérifier graphiquement à l'aide de la calculatrice les résultats trouvés.

forme indéterminée, factorisation, étude complète

Exercice 11.

1. Pour tout nombre réel x , $f'(x) = 2x - 2$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x + 5 = +\infty$. Donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

On a $f(x) = x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right) = 1.$$

Donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- 3.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$

Exercice 12.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - x^2 - 5x + 1.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction g .
2. Étudier les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction g et vérifier graphiquement, à l'aide de la calculatrice, les résultats trouvés.

forme indéterminée, factorisation, étude complète

Exercice 12.

1. Pour tout nombre réel x , $f'(x) = 3x^2 - 2x - 5$.

$\Delta = 64$, donc $f'(x)$ a deux racines $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{5}{3}$.

x	$-\infty$	-1	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+

La fonction f est donc croissante sur $]-\infty; -1]$, décroissante sur $[-1; \frac{5}{3}]$ et croissante sur $[\frac{5}{3}; +\infty[$.

2. On a $f(x) = x^3 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = 1.$$

Donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

3.

x	$-\infty$	-1	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	4	$-\frac{148}{27}$	$+\infty$

Exercice 13.

Soit f la fonction définie sur $] -\infty; 1[\cup] 1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-2}{x-1}.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction f .
2. Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$ et en déduire une asymptote éventuelle à la courbe représentative de la fonction f .
3. Étudier les limites de $f(x)$ quand x tend vers 1 (on distinguera les cas $x < 1$ et $x > 1$).
En déduire une asymptote éventuelle à la courbe représentative de la fonction f .
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f et vérifier graphiquement les résultats trouvés.

limites simples, asymptotes, étude complète

Exercice 13.

1. Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f'(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$.

Sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $(x-1)^2 > 0$ et donc $f'(x) > 0$.

f est donc croissante sur $] -\infty; 1[$ et croissante sur $] 1; +\infty[$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty$. Donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$. Lorsque $x < 1$, alors $x-1 < 0$ et $f(x) > 0$.

Donc, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$.

Lorsque $x > 1$, alors $x-1 > 0$ et $f(x) < 0$.

Donc, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$.

La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

4.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$	0

Exercice 14.

Soit f la fonction définie sur $] -\infty; 2[\cup] 2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{4-2x}.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction f .
2. Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$ et en déduire une asymptote éventuelle à la courbe représentative de la fonction f .
3. Étudier les limites de $f(x)$ quand x tend vers 2 (on distinguera les cas $x < 2$ et $x > 2$).
En déduire une asymptote éventuelle à la courbe représentative de la fonction f .
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f et vérifier graphiquement les résultats trouvés.

forme indéterminée, factorisation, étude complète, asymptotes

Exercice 14.

1. Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$,

$$f'(x) = \frac{1(4-2x) + 2x}{(4-2x)^2} = \frac{4}{(4-2x)^2}.$$

Sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, $(4-2x)^2 > 0$ et donc $f'(x) > 0$. f est donc croissante sur $] -\infty; 2[$ et croissante sur $] 2; +\infty[$.

$$2. \quad f(x) = \frac{x}{-2x\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \frac{1}{-2\left(1 - \frac{2}{x}\right)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -2\left(1 - \frac{2}{x}\right) = -2, \text{ donc par quotient, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{De même, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}.$$

La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y = -\frac{1}{2}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 2} (4-2x) = 0$.

Lorsque $x < 2$, alors $4-2x > 0$ et pour x proche de 2, $f(x) > 0$. Donc, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = +\infty$.

Lorsque $x > 2$, alors $4-2x < 0$ et pour x proche de 2, $f(x) < 0$. Donc, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = -\infty$.

La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

- 4.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\begin{array}{c} +\infty \\ -\infty \end{array}$	$-\frac{1}{2}$

Exercice 15.

Démontrer que la courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{5-2x}{2x-3}$, définie sur l'ensemble $] -\infty; 1,5[\cup] 1,5; +\infty[$, admet une asymptote verticale et une asymptote horizontale.

forme indéterminée, factorisation, asymptotes

Exercice 15.

$$f(x) = \frac{5-2x}{2x-3} = \frac{-2x\left(1-\frac{5}{2x}\right)}{2x\left(1-\frac{3}{2x}\right)} = \frac{-\left(1-\frac{5}{2x}\right)}{1-\frac{3}{2x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{5}{2x}\right) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{2x}\right) = 1.$$

Donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$. De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.

La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 1,5} (5-2x) = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1,5} (2x-3) = 0.$$

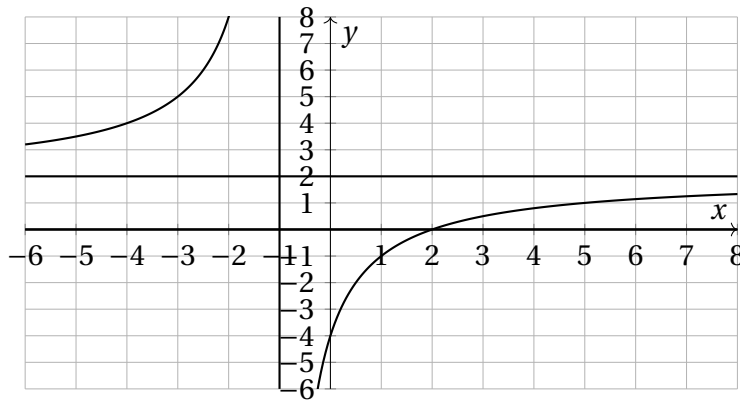
Lorsque $x < 1,5$, alors $2x-3 < 0$ et, pour x proche de $1,5$, $f(x) < 0$. Donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 1,5 \\ x < 1,5}} f(x) = -\infty$.

Lorsque $x > 1,5$, alors $2x-3 > 0$ et, pour x proche de $1,5$, $f(x) > 0$. Donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 1,5 \\ x > 1,5}} f(x) = +\infty$.

La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = 1,5$.

Exercice 16.

On a représenté ci-dessous une fonction f définie sur $] -\infty; -1[\cup] -1; +\infty[$.



1. Conjecturer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de la fonction f .
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f .

lecture graphique

Exercice 16.

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$
 $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$
 $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$

2. On peut conjecturer que la courbe admet, d'une part, une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $-\infty$ et en $+\infty$ et, d'autre part, une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

3.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	2	$\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$	2

Exercice 17.

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 5 - 3x \text{ et } g(x) = e^x.$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Déterminer la limite de g en $-\infty$.
3. En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{5-3x}$.

limites composées

Exercice 17.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
2. $\lim_{X \rightarrow -\infty} g(X) = 0$
3. On a $h(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} g(X) = 0.$$

Donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.

Exercice 18.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

limites composées

Exercice 18.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 1 = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty.$$

Donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 19.

Soit g la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$g(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}.$$

Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

forme indéterminée, factorisation, limites composées

Exercice 19.

$$\frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x \left(1 + \frac{1}{2x}\right)}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{2 \left(1 + \frac{1}{2x}\right)}{1 - \frac{1}{x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \left(1 + \frac{1}{2x}\right) = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1.$$

Par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$.

De plus, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = \sqrt{2}$.

Donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \sqrt{2}$.

Exercice 20.

Soit h la fonction définie sur $] -\infty; 3[$ par :

$$h(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{3 - x}}.$$

Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.

forme indéterminée, factorisation, limites composées

Exercice 20.

$$\frac{x^2 + 1}{3 - x} = \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{-x \left(1 - \frac{3}{x}\right)} = \frac{-x \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{1 - \frac{3}{x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{3}{x} = 1.$$

Par quotient, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{3 - x} = +\infty$.

De plus, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$.

Donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$.

Exercice 21.

Soit r la fonction définie sur $] -\infty; 3[$ par :

$$r(x) = e^{\frac{x^2 + 1}{3 - x}}.$$

Déterminer la limite de la fonction r en $-\infty$.

forme indéterminée, factorisation, limites composées

Exercice 21.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{3 - x} = +\infty.$$

De plus,

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty.$$

Donc, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} r(x) = +\infty.$$

Exercice 22.

Soit s la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$s(x) = e^{x^2 - 3x + 2}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction s en $+\infty$.
2. Déterminer la limite de la fonction s en $-\infty$.

forme indéterminée, factorisation, limites composées

Exercice 22.

$$1. x^2 - 3x + 2 = x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty.$$

Donc, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} s(x) = +\infty.$$

2. De même,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} s(x) = +\infty.$$

Exercice 23.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (3 - x^2)^3.$$

Sans développer $f(x)$, déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

limites composées

Exercice 23.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - x^2) = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} X^3 = -\infty.$$

Donc, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

De même,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Exercice 24.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}.$$

1. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Montrer que $f(x) = \frac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}}$.

3. En déduire la limite de la fonction f en $-\infty$.

forme indéterminée, conjugué, limites composées

Exercice 24.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 1 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$. Donc, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty.$$

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$. Donc, par somme,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

2.

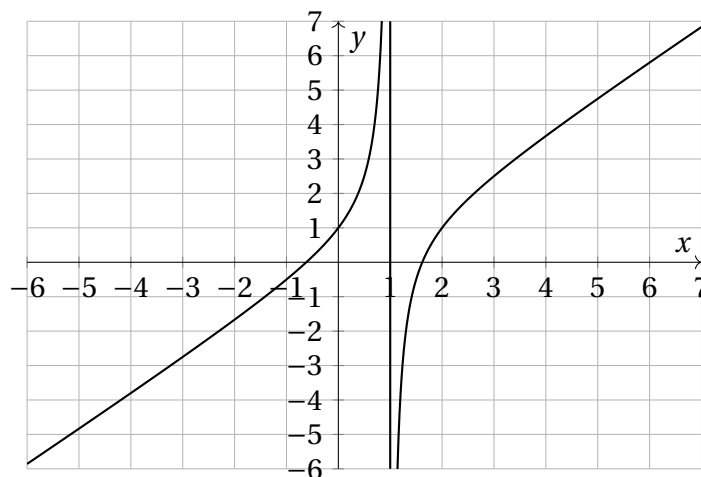
$$f(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})(x - \sqrt{x^2 + 1})}{(x - \sqrt{x^2 + 1})} = \frac{x^2 - (x^2 + 1)}{(x - \sqrt{x^2 + 1})} = \frac{-1}{(x - \sqrt{x^2 + 1})}.$$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1}) = -\infty$. Donc, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

Exercice 25.

On a représenté ci-dessous une fonction f définie sur $] -\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.



1. Conjecturer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de la fonction f .
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f .

lecture graphique

Exercice 25.

1.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$$

2. On peut conjecturer que la courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

3.

Exercice 26.

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \sqrt{\frac{n^2 + 1}{n + 2}}.$$

Déterminer la limite de la suite (u_n) .

forme indéterminée, factorisation, limites composées

Exercice 26.

$$\frac{n^2 + 1}{n + 2} = \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{n \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{1 + \frac{2}{n}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{n} = 1.$$

Donc, par quotient,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)}{1 + \frac{2}{n}} = +\infty.$$

De plus, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$. Donc, par composition,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Exercice 27.

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

2. En déduire la limite de la suite (u_n) .

forme indéterminée, conjugué

Exercice 27.

1. Pour tout entier naturel n :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n+1 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$. Donc par composition,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty.$$

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$. Donc, par somme,

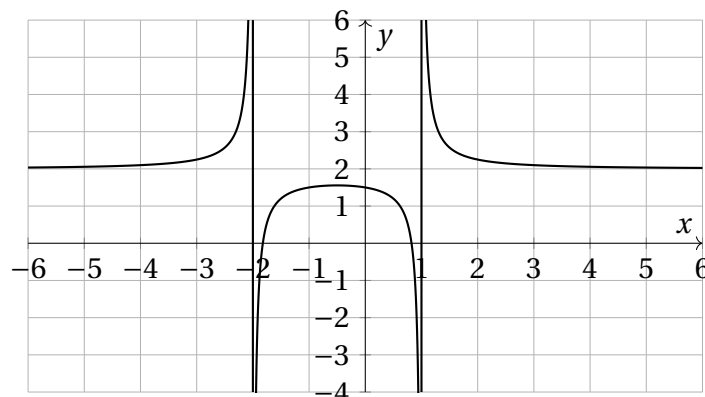
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = +\infty,$$

puis par quotient,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Exercice 28.

On a représenté ci-dessous une fonction f définie sur $] -\infty; -2[\cup] -2; 1[\cup] 1; +\infty[$.



1. Conjecturer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de la fonction f .
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f .

lecture graphique

Exercice 28.

1.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$$

2. On peut conjecturer que la courbe admet deux asymptotes verticales d'équations respectives $x = -2$ et $x = 1$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. Tableau de variation :

x	$-\infty$	-2	$0,5$	1	$+\infty$
$f(x)$	2	$+\infty$	$f(-0,5)$	$+\infty$	2

Exercice 29.

On pose $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

forme indéterminée, factorisation, limites composées

Exercice 29.

1. La fonction f est définie pour tout nombre réel x tel que $x^2 - 2x + 3 \geq 0$.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 = -8,$$

donc, pour tout nombre réel x ,

$$x^2 - 2x + 3 > 0$$

et la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. On a $f(x) = \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty,$$

alors, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

De même,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Exercice 30.

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x + 1 + \frac{1}{x}}.$$

Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

limites composées

Exercice 30.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 + \frac{1}{x} \right) = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty,$$

alors, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

De même,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

Exercice 31.

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \frac{3e^x + 1}{1 + e^x}$

2. $g : x \mapsto \frac{e^x + 3}{e^{2x}}$

3. $h : x \mapsto \frac{(e^x + 5)(x - 2)}{x + 3}$

4. $i : x \mapsto \frac{7e^x + 1}{(e^x + 3)^2}$

5. $j : x \mapsto \frac{e^x + 3}{x}$

6. $k : x \mapsto (e^x - 5)(x + 700)$

forme indéterminée, factorisation, exponentielle

Exercice 31.

1.

$$\frac{3e^x + 1}{1 + e^x} = \frac{3e^x \left(1 + \frac{1}{3e^x} \right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)} = \frac{3 \left(1 + \frac{1}{3e^x} \right)}{1 + \frac{1}{e^x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x} \right) = 1.$$

Donc, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x + 1}{1 + e^x} = 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Donc, par opérations sur les limites,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3e^x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^x) = 1.$$

Donc, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3e^x + 1}{1 + e^x} = 1.$$

2.

$$\frac{e^x + 3}{e^{2x}} = \frac{e^x \left(1 + \frac{3}{e^x}\right)}{(e^x)^2} = \frac{1 + \frac{3}{e^x}}{e^x}.$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{e^x}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Donc, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3}{e^{2x}} = 0.$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow 0} X^2 = 0.$$

Donc, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x)^2 = 0.$$

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 3) = 3.$$

Donc, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 3}{e^{2x}} = +\infty.$$

3.

$$\frac{(e^x + 5)(x - 2)}{x + 3} = \frac{x(e^x + 5) \left(1 - \frac{2}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)} = \frac{(e^x + 5) \left(1 - \frac{2}{x}\right)}{1 + \frac{3}{x}}.$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 5) = +\infty.$$

Donc, par opérations sur les limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x + 5)(x - 2)}{x + 3} = +\infty.$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 5) = 5.$$

Donc, par opérations sur les limites,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^x + 5)(x - 2)}{x + 3} = 5.$$

4.

$$\frac{7e^x + 1}{(e^x + 3)^2} = \frac{e^x \left(7 + \frac{1}{e^x}\right)}{(e^x)^2 \left(1 + \frac{6}{e^x} + \frac{9}{(e^x)^2}\right)} = \frac{7 + \frac{1}{e^x}}{e^x \left(1 + \frac{6}{e^x} + \frac{9}{(e^x)^2}\right)}.$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(7 + \frac{1}{e^x}\right) = 7, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{6}{e^x} + \frac{9}{(e^x)^2}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Donc, par opérations sur les limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7e^x + 1}{(e^x + 3)^2} = 0.$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 3) = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow 3} X^2 = 9.$$

Donc, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 3)^2 = 9 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (7e^x + 1) = 1.$$

Donc, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7e^x + 1}{(e^x + 3)^2} = \frac{1}{9}.$$

5.

$$\frac{e^x + 3}{x} = \frac{e^x}{x} \left(1 + \frac{3}{e^x} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{e^x} \right) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

Donc, par produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3}{x} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 3) = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$$

Donc, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 3}{x} = 0.$$

6.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 5) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 700) = +\infty.$$

Donc, par produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 5)(x + 700) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 5) = -5 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 700) = -\infty.$$

Donc, par produit,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 5)(x + 700) = +\infty.$$

Exercice 32.

Le tableau de variation ci-dessous décrit les variations d'une fonction f .

x	$-\infty$	-5	0	$+\infty$
$f(x)$	2 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $+\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	

1. Utiliser les notations qui conviennent pour décrire les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Donner les équations des asymptotes éventuelles de la courbe de la fonction f .
3. Construire une courbe susceptible de représenter la fonction f .

lecture graphique

Exercice 32.

1.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = +\infty$$

$$x < -5$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = -\infty$$

$$x > -5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$x < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$x > 0$$

2. La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $-\infty$ et en $+\infty$ et deux asymptotes verticales d'équations respectives $x = -5$ et $x = 0$.

Exercice 33.

Soit f la fonction définie sur $] -\infty; 1[\cup] 1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x-2}{1-x}.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction f .
2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de la fonction f .
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f et vérifier graphiquement les résultats.

forme indéterminée, factorisation, étude complète

Exercice 33.

1. Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$f'(x) = \frac{3(1-x) + 3x-2}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $(1-x)^2 > 0$ et donc $f'(x) > 0$. La fonction f est donc croissante sur $] -\infty; 1[$ et croissante sur $] 1; +\infty[$.

- 2.

$$f(x) = \frac{3x(1 - \frac{2}{3x})}{-x(1 - \frac{1}{x})} = \frac{-3(1 - \frac{2}{3x})}{1 - \frac{1}{x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-3 \left(1 - \frac{2}{3x} \right) \right) = -3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right) = 1.$$

Donc, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3.$$

De même,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3.$$

La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y = -3$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x-2) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) = 0.$$

Lorsque $x < 1$, alors $1-x > 0$ et, pour x proche de 1, $f(x) > 0$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

$$x < 1$$

Lorsque $x > 1$, alors $1-x < 0$ et, pour x proche de 1, $f(x) < 0$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

$$x > 1$$

La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	-3	$+\infty$	-3

- 3.

Exercice 34.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{5-2x}{-x-3}$ sur $] -\infty; -3[\cup] -3; +\infty[$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f .
2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de la fonction f .
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f et vérifier graphiquement les résultats.

forme indéterminée, factorisation, étude complète

Exercice 34.

1. Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$,

$$f'(x) = \frac{-2(-x-3) + 5 - 2x}{(-x-3)^2} = \frac{11}{(-x-3)^2}.$$

Sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $(-x-3)^2 > 0$ et donc $f'(x) > 0$. La fonction f est donc croissante sur $] -\infty; -3[$ et croissante sur $] -3; +\infty[$.

- 2.

$$f(x) = \frac{-2x(1 - \frac{5}{2x})}{-x(1 + \frac{3}{x})} = \frac{2(1 - \frac{5}{2x})}{1 + \frac{3}{x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2\left(1 - \frac{5}{2x}\right) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right) = 1.$$

Donc, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

De même,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2.$$

La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -3} (5 - 2x) = 11 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -3} (-x - 3) = 0.$$

Lorsque $x < -3$, alors $-x - 3 > 0$ et, pour x proche de -3 , $f(x) > 0$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty$$

$$x < -3$$

Lorsque $x > -3$, alors $-x - 3 < 0$ et, pour x proche de -3 , $f(x) < 0$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$$

$$x > -3$$

La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = -3$.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 2$	

- 3.

Exercice 35.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

- Étudier le sens de variation de la fonction f .
- Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de la fonction f .
- Dresser le tableau de variation de la fonction f et vérifier graphiquement les résultats.

forme indéterminée, factorisation, étude complète

Exercice 35.

- f est définie pour tout nombre réel x tel que $x^2 + x - 2 \neq 0$. Le trinôme $x^2 + x - 2$ admet deux racines évidentes, $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$. Ainsi, la fonction f est définie sur $] -\infty; -2[\cup] -2; 1[\cup] 1; +\infty[$.
- Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$,

$$f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x-2)^2}.$$

Sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$, $(x^2 + x - 2)^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $-2x - 1$, c'est-à-dire $f'(x) \geq 0$ sur $] -\infty; -2[\cup] -2; -\frac{1}{2}[$ et $f'(x) \leq 0$ sur $]-\frac{1}{2}; 1[\cup] 1; +\infty[$. La fonction f est donc croissante sur les intervalles $] -\infty; -2[$ et $] -2; -\frac{1}{2}[$ et décroissante sur $]-\frac{1}{2}; 1[$ et $] 1; +\infty[$.

- Comme on a $f(x) = \frac{1}{x^2(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x})}$, alors, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$ et en $+\infty$. Comme $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + x - 2) = 0$ et

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
x^2+x-2	+	0	-	0	+

alors, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$$

$$x < -2$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$$

$$x > -2$$

De même, comme $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 2) = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

$$x < 1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

$$x > 1$$

La courbe représentative de la fonction f admet deux asymptotes verticales d'équations respectives $x = -2$ et $x = 1$.

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow -\frac{4}{9} \searrow -\infty$			$+\infty \searrow 0$

4.

Exercice 36.

Soit f la fonction définie sur $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x}.$$

1. Étudier les limites de $f(x)$ quand x tend vers 0. Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative?
2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Tracer la courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y = x + 3$. Que constate-t-on?
4. Soit g la fonction définie sur $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - (x + 3).$$

Montrer que $g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.

On dit que la droite d'équation $y = x + 3$ est une **asymptote oblique** à la courbe représentative de la fonction f .

forme indéterminée, factorisation, étude complète

Exercice 36.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3x + 1) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, alors, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$x < 0$$

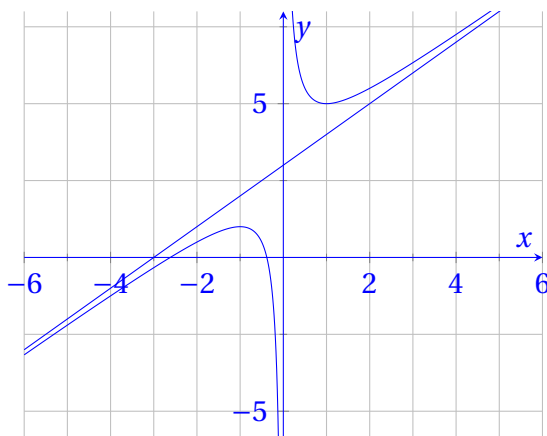
et

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$x > 0$$

La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

2. On a $f(x) = x + 3 + \frac{1}{x}$, donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.



3.

On constate que lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, la courbe semble se rapprocher de la droite d'équation $y = x + 3$.

4. Pour tout $x \neq 0$, $g(x) = \frac{1}{x}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$.

Exercice 37.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^2 - 5x - 2}{x - 3}$ sur $] -\infty; 3[\cup] 3; +\infty[$.

1. Étudier les limites de $f(x)$ quand x tend vers 3. Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative?
2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Tracer la courbe représentative de la fonction f .
4. Déterminer les trois réels a , b et c tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}.$$

5. Soit g la fonction définie sur $] -\infty; 3[\cup] 3; +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - (ax + b).$$

Montrer que $g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$. Comment peut-on interpréter graphiquement ce résultat?

forme indéterminée, factorisation, étude complète

Exercice 37.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 - 5x - 2) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0$, alors, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$$

$$x < 3$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$$

$$x > 3$$

La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = 3$.

2. On a

$$f(x) = \frac{2x^2 \left(1 - \frac{5}{2x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 - \frac{3}{x}\right)} = \frac{2x \left(1 - \frac{5}{2x} - \frac{1}{x^2}\right)}{1 - \frac{3}{x}}.$$

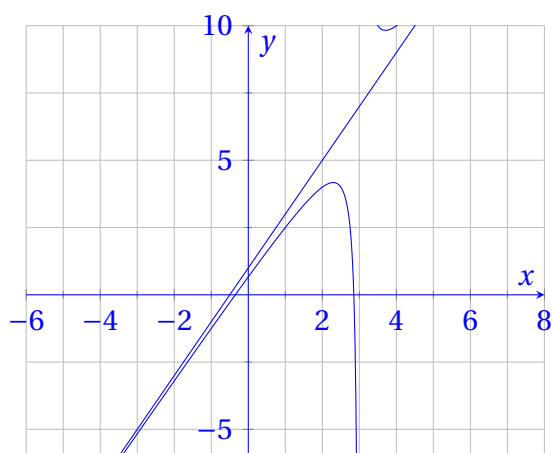
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \left(1 - \frac{5}{2x} - \frac{1}{x^2}\right) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right) = 1,$$

donc, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

De même,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$



- 3.

4.

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3} \Leftrightarrow f(x) = \frac{ax^2 + (b-3a)x + c-3b}{x-3}$$

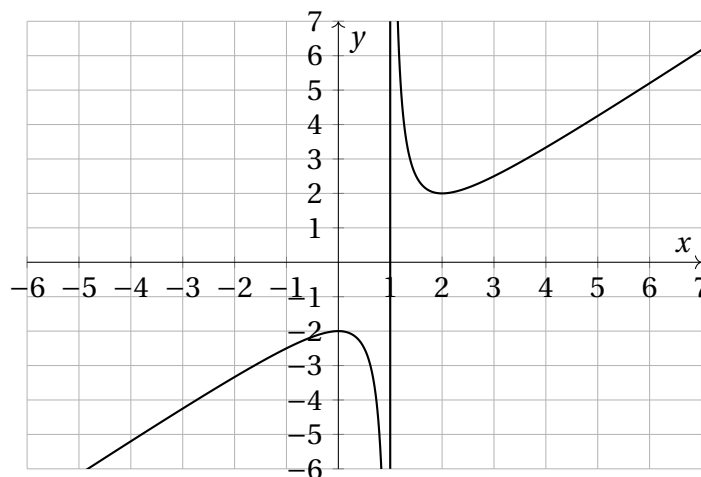
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b-3a=-5 \\ c-3b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$$

5. Pour tout $x \neq 3$, $g(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-3} - (2x + 1) = \frac{1}{x-3}$. Ainsi, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$. On peut en déduire que la droite d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f .

Exercice 38.

On considère la fonction f définie sur $] -\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$.

- Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. Que peut-on en déduire graphiquement?
- On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.



- a. Démontrer que, pour tout réel $x \neq 1$:

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-1}.$$

- Déterminer la limite de $f(x) - (x - 1)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Reproduire le graphique et construire la droite d de la fonction $x \mapsto x - 1$. Que constate-t-on?
- Étudier la position relative de la courbe représentative de la fonction f et de la droite d .

forme indéterminée, factorisation, étude complète

Exercice 38.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 2) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$, alors, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

$$x < 1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

$$x > 1$$

Par ailleurs, on a

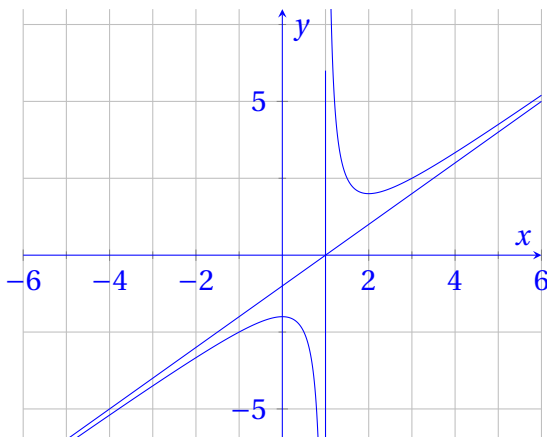
$$f(x) = \frac{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{x \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{1 - \frac{1}{x}},$$

donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. La courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

2. a. Pour tout nombre réel $x \neq 1$,

$$x - 1 + \frac{1}{x - 1} = \frac{(x - 1)^2 + 1}{x - 1} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = f(x).$$

- b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - 1} = 0$ et, de même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0$.



3.

La droite d est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$.

4. $f(x) - (x - 1) = \frac{1}{x - 1}$, donc $f(x) - (x - 1) < 0$ sur l'intervalle $]1; +\infty[$ et la courbe est au-dessus de la droite d sur cet intervalle. De plus, $f(x) - (x - 1) < 0$ sur l'intervalle $] -\infty; 1[$ et la courbe est en dessous de la droite d sur cet intervalle.

Exercice 39.

Position relative de deux courbes

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $] -\infty; -1[\cup] -1; 1[\cup] 1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 3}{x^2 - 1}$$

et la fonction g définie sur $] -\infty; -1[\cup] -1; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 + 2}{x + 1}.$$

- Étudier les limites des fonctions f et g aux bornes de leurs ensembles de définition.
- Tracer leurs courbes représentatives à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice. Quelle remarque peut-on faire sur ces deux courbes quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$?
- Montrer que, pour tout réel x distinct de -1 et 1 , on a : $f(x) - g(x) = \frac{-2x + 5}{x^2 - 1}$.
 - En déduire la position relative des courbes représentatives des fonctions f et g .
 - Déterminer les limites de $f(x) - g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$. Cela confirme-t-il la remarque faite à la question 2?

forme indéterminée, factorisation, étude complète

Exercice 39.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - x^2 + 3) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$ et :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc, par quotient,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$$

et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty.$$

De même, $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - x^2 + 3) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 1) = 0$, donc, par quotient,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$$

et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty.$$

$$f(x) = \frac{x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^3}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{x \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^3}\right)}{1 - \frac{1}{x^2}}.$$

Donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 2) = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) = 0, \quad \text{alors, par quotient,}$$

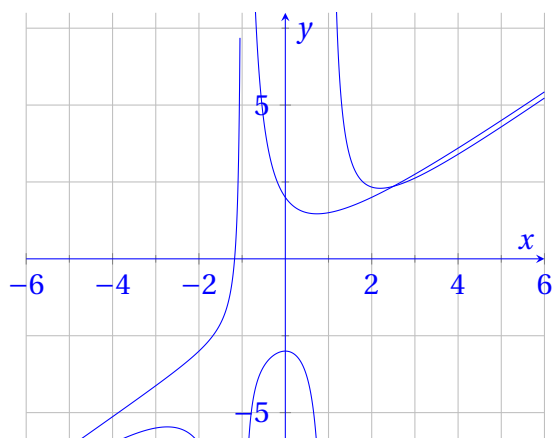
$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} g(x) = -\infty$$

et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} g(x) = +\infty.$$

$$g(x) = \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{x \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.



2.

Il semble que la courbe de g soit asymptote à celle de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. a.

$$f(x) - g(x) = \frac{x^3 - x^2 + 3}{x^2 - 1} - \frac{(x^2 + 2)(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{-2x + 5}{x^2 - 1}.$$

b. Tableau :

x	$-\infty$	-1	1	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$-2x + 5$	+	+	+	0	-
$x^2 - 1$	+	0	-	0	+
$f(x) - g(x)$	+	0	-	0	-

Donc, la courbe de g coupe la courbe de f au point d'abscisse $\frac{5}{2}$.

c.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2x + 5}{x^2 - 1} \right) = 0$$

car après transformation, on trouve que le numérateur tend vers -2 et le dénominateur tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-2x + 5}{x^2 - 1} \right) = 0$$

car après transformation, on trouve que le numérateur tend vers -2 et le dénominateur tend vers $+\infty$.

Cela conforte la remarque faite à la question 2.

Exercice 40.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2 \sin(x)$.

1. Montrer que pour tout réel x , $x - 2 \leq f(x) \leq x + 2$.
2. Calculer la limite de f en $+\infty$.
3. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

comparaison

Exercice 40.

1. Pour tout réel x , $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ donc $-2 \leq 2 \sin(x) \leq 2$ et par suite, $-2 + x \leq f(x) \leq 2 + x$.
2. Pour tout réel x ,

$$-2 + x \leq f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 + x) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

3. Pour tout réel $x > 0$,

$$-\frac{2}{x} + 1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{2}{x} + 1.$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Exercice 41.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 \cos(x) - x$.

1. Montrer que pour tout réel x , $-2 - x \leq f(x) \leq 2 - x$.
2. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. a. Montrer que pour tout réel x strictement négatif, on a :

$$\frac{2}{x} - 1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq -\frac{2}{x} - 1.$$

b. En déduire

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

comparaison

Exercice 41.

1. Pour tout réel x , $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ donc $-2 \leq 2 \cos(x) \leq 2$ et par suite, $-2 - x \leq f(x) \leq 2 - x$.
2. Pour tout réel x ,

$$-2 - x \leq f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2 - x) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

$$f(x) \leq 2 - x \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x) = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

3. a. Pour tout réel $x < 0$,

$$\frac{-2 - x}{x} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{2 - x}{x} \text{ donc } \frac{2}{x} - 1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq -\frac{2}{x} - 1.$$

b. D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1.$$

Exercice 42.

Soit u une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x , on a : $x - 1 \leq u(x) \leq 2x - 1$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{u(x)}$.

1. Montrer que pour tout réel x , $e^{x-1} \leq f(x) \leq e^{2x-1}$.
2. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

comparaison

Exercice 42.

1. Pour tout réel x , $x - 1 \leq u(x) \leq 2x - 1$ donc par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

$$e^{x-1} \leq e^{u(x)} \leq e^{2x-1},$$

$$\text{soit } e^{x-1} \leq f(x) \leq e^{2x-1}.$$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 43.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x , on a : $1 \leq f(x) \leq 2$. Soit g la fonction définie sur $] -\infty; 0[$ par $g(x) = \frac{2f(x) + 1}{x}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $] -\infty; 0[$,

$$\frac{5}{x} \leq g(x) \leq \frac{3}{x}.$$

2. Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en 0 .

comparaison

Exercice 43.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty; 0[$, $1 \leq f(x) \leq 2$ donc $3 \leq 2f(x)+1 \leq 5$ donc $\frac{3}{x} \geq \frac{2f(x)+1}{x} \geq \frac{5}{x}$
(car $x < 0$). Par conséquent, $\frac{5}{x} \leq g(x) \leq \frac{3}{x}$.
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x) = -\infty$.

Exercice 44.

a.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{4e^x}{x} \right)$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e^x}{2x^2} \right)$$

c.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4e^x}{\sqrt{x}} \right)$$

d.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}e^x}{x} \right)$$

e.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{e^x}$$

f.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5-3x}{e^x}$$

croissances comparées

Exercice 44.

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{4e^x}{x} \right) = -\infty$.
- b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e^x}{2x^2} \right) = +\infty$.
- c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4e^x}{\sqrt{x}} \right) = +\infty$.
- d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}e^x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{\sqrt{x}} \right) = +\infty$.
- e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{e^x} = 0$.
- f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5-3x}{e^x} = 0$.

Exercice 45.

a.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x-1)e^x$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2+x+3)e^x$$

c.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-e^x)$$

d.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2-2e^x)$$

e.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - xe^x)$$

f.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x)e^x$$

g.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3xe^{3x})$$

h.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x)e^{2-x}$$

croissances comparées

Exercice 45.

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x - 1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (5xe^x - e^x) = 0.$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 3)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2e^x + xe^x + 3e^x) = 0.$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(3 - \frac{e^x}{x} \right) = -\infty.$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 2e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(3 - \frac{2e^x}{x^2} \right) = -\infty.$

e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - xe^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{e^x}{x} \right) = -\infty.$

f. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - xe^x) = 0.$

g. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3xe^{3x}) = 0.$

h. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x)e^{2-x} = 0.$

Exercice 46.

Calculer les limites suivantes.

a.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x}$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-3x}}{x}$$

c.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{0,1x}}{2x}$$

croissances comparées

Exercice 46.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \times \frac{e^x}{x} = +\infty.$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-3x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^xe^{2x}} = -\infty.$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{0,1x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{0,1x}}{20 \times 0,1x} = +\infty.$

Exercice 47.

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 4 - \frac{2e^x}{x}$. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

croissances comparées

Exercice 47.

- $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0^+$ donc par quotient $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^x}{x} = +\infty$, et par conséquent $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$.
- Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Exercice 48.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (7 - x)e^x$. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

croissances comparées

Exercice 48.

- $f(x) = (7 - x)e^x = 7e^x - xe^x$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7e^x) = 0$ et par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 0$ donc par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 - x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.