EXERCICES
Limites de suites

Mots clés : *calculatrice, python, limite, forme indéterminée, conjugué, suite géométrique,suite arithmétique, comparaison, gendarmes, somme, suite arithmético-géométrique*

Exercice 1.

Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n^3 - 4$.

1. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

2. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

- **a.** $u_n > 100$,
- **b.** $u_n > 1\,000$,
- **c.** $u_n > 10\,000$.

calculatrice

Exercice 1.

1. On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2.
- **a.** $n = 5$
- **b.** $n = 11$
- **c.** $n = 22$

Exercice 2.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (u_n).

2. On veut déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 1\,000$.

- **a.** Recopier et compléter le programme en Python suivant pour qu'il réponde au problème.

```
n = 0
u = 0
while ... :
    u = ...
    n = ...
print(...)
```

- **b.** Déterminer cet entier à l'aide de la calculatrice.

calculatrice, python

Exercice 2.

1. On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2.
- **a.** Programme :

```
n = 0
u = 2
while u <= 1000 :
    u = 3*u
    n = n+1
print(n)
```

b. Cet entier est 6.

Exercice 3.

Soit (v_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$v_n = \frac{1}{2n+1}.$$

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (v_n).

2. On veut déterminer le plus petit entier naturel n tel que $v_n < 0{,}001$.

a. Recopier et compléter le programme en Python ci-contre pour qu'il réponde au problème.

```
n = 0
v = ...
while ... :
    n = ...
    v = ...
print(...)
```

b. Déterminer cet entier à l'aide de la calculatrice.

calculatrice, python

Exercice 3.

1. On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

2. **a.** Programme :

```
n = 0
v = 1
while v >= 0.001 :
    n = n+1
    v = 1/(2*n+1)
print(n)
```

b. Cet entier est 500.

Exercice 4.

Déterminer la limite des suites suivantes.

a. (u_n) définie par $u_n = 2n - 1$.

b. (v_n) définie par $v_n = -3 + \dfrac{5}{n+4}$.

limite

Exercice 4.

a. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

b. $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -3$

Exercice 5.

Déterminer la limite des suites suivantes.

a. (u_n) définie par $u_n = \left(n + \dfrac{1}{n}\right) \times \left(\dfrac{1}{n^4} - 5\right)$.

b. (v_n) définie par $v_n = \dfrac{3+n}{2+\dfrac{1}{n}}$.

limite

Exercice 5.

a.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n+\frac{1}{n}\right)=+\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^4}-5\right)=-5$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=-\infty$$

b.

$$\lim_{n\to+\infty}(3+n)=+\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2$$

$$\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty$$

Exercice 6.

Déterminer la limite des suites suivantes.

a. (u_n) définie par $u_n = (2-n^2)\times\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-2\right)$.

b. (v_n) définie par $v_n = \dfrac{n^2+n}{4}$.

limite

Exercice 6.

a.

$$\lim_{n\to+\infty}(2-n^2)=-\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-2\right)=-2$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$$

b.

$$\lim_{n\to+\infty}(n^2+n)=+\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty$$

Exercice 7.

Déterminer la limite des suites ci-dessous, définies pour tout entier naturel n non nul par les expressions suivantes.

1. $u_n = -n^2-3n+5$.

2. $v_n = n^3\left(2+\dfrac{3}{n^2}\right)$.

3. $w_n = (3-5n)(n^3-4)$.

4. $x_n = \sqrt{n}\,(n^2+2n)$.

limite

Exercice 7.

1.

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty\text{, donc, en appliquant la règle des signes, } \lim_{n\to+\infty} (-n^2) = -\infty.$$

$$\lim_{n\to+\infty} (-3n+5) = -\infty \text{ donc, par somme, } \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$

2.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0\text{, donc, par produit, } \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2} = 0,$$

puis, par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(2+\frac{3}{n^2}\right) = 2.$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty.$$

Donc, finalement, par produit,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$

3.

$$\lim_{n\to+\infty} (3-5n) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} (n^3-4) = +\infty,$$

donc, par produit,

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = -\infty.$$

4.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} (n^2+2n) = +\infty,$$

donc, par produit,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty.$$

Exercice 8.

Déterminer la limite des suites ci-dessous, définies pour tout entier naturel n non nul par les expressions suivantes.

1. $u_n = \dfrac{2n+4}{\dfrac{1}{n}-5}$.
2. $v_n = \dfrac{-3}{2n^2+n+1}$.
3. $w_n = \dfrac{2-\dfrac{1}{n^2}}{7+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}}$.
4. $x_n = \dfrac{-4}{\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n}}$.

limite

Exercice 8.

1.

$$\lim_{n\to+\infty} (2n+4) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}-5\right) = -5,$$

donc, par quotient,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$

2.

$$\lim_{n\to+\infty}(-3)=-3 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}(n^2+2n+1)=+\infty,$$

donc, par quotient,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

3.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)=2 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(7+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)=7,$$

donc, par quotient,

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{2}{7}.$$

4.

$$\lim_{n\to+\infty}(-4)=-4 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n}\right)=0^+,$$

donc, par quotient,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty.$$

Exercice 9.

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

1. Peut-on déterminer la limite de la suite (u_n) en utilisant les propriétés des opérations sur les limites ?
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :
$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n=\sqrt{n+1}$.
   a. Montrer que $v_n>\sqrt{n}$.
   b. En déduire la limite de la suite (v_n).
4. En déduire la limite de la suite (u_n).

forme indéterminée, conjugué

Exercice 9.

1. Non : $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$.
Donc on a une forme indéterminée « $+\infty-\infty$ ».
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$u_n=\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
donc
$$u_n=\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$
3. a. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n+1>n$ donc $\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
Donc $v_n>\sqrt{n}$.
   b. $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$.
Donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.
4. Donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=+\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$.

Exercice 10.

1. Déterminer la limite des suites suivantes :

   a. (u_n) est la suite définie par $u_n = 5^n - 0{,}2^n$.

   b. (v_n) est la suite définie par $v_n = 6^n - 7^n$.

   c. (w_n) est la suite définie par $w_n = 9^n - 8^n$.

suite géométrique, forme indéterminée

Exercice 10.

a. $-1 < 0,2 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,2^n = 0$.
$5 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b. $v_n = 6^n\left(1 - \left(\dfrac{7}{6}\right)^n\right)$.
$\dfrac{7}{6} > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{7}{6}\right)^n = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-(7/6)^n\right) = -\infty$.
$6 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 6^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

c. $w_n = 9^n\left(1 - \left(\dfrac{8}{9}\right)^n\right)$.
$-1 < \dfrac{8}{9} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{8}{9}\right)^n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-(8/9)^n\right) = 1$.
$9 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 9^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

Exercice 11.

Déterminer la limite des suites suivantes.

a. (u_n) définie par $u_n = 3n - n^3 + 2$.

b. (v_n) définie par $v_n = \dfrac{n-5}{2n+4}$.

limite, forme indéterminée

Exercice 11.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = n^3 \times \left(\frac{3}{n^2} - 1 + \frac{2}{n^3}\right).$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{n^2} - 1 + \frac{2}{n^3}\right) = -1$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{n \times \left(1 - \dfrac{5}{n}\right)}{n \times \left(2 + \dfrac{4}{n}\right)} = \frac{1 - \dfrac{5}{n}}{2 + \dfrac{4}{n}}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{5}{n}\right) = 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(2 + \frac{4}{n}\right) = 2$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 12.

Déterminer la limite des suites suivantes.

a. (u_n) définie par $u_n = n + 3n^2 - n^3$.

b. (v_n) définie par $v_n = \dfrac{n^3+2}{2n^2-1}$.

limite, forme indéterminée

Exercice 12.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = n^3 \times \left(\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n} - 1\right).$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n} - 1\right) = -1$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{n^3 \times \left(1+\dfrac{2}{n^3}\right)}{n^2 \times \left(2-\dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{n \times \left(1+\dfrac{2}{n^3}\right)}{2-\dfrac{1}{n^2}}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n^2}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(2-\frac{1}{n^2}\right) = 2$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 13.

Déterminer la limite des suites suivantes.

a. (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n^2+2n}{n+1}$.

b. (v_n) définie par $v_n = \dfrac{3n+\sqrt{n}}{2n+3}$.

limite, forme indéterminée

Exercice 13.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{n^2 \times \left(1+\dfrac{2}{n}\right)}{n \times \left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \frac{n \times \left(1+\dfrac{2}{n}\right)}{1+\dfrac{1}{n}}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right) = 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{n \times \left(3+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n \times \left(2+\dfrac{3}{n}\right)} = \frac{3+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{2+\dfrac{3}{n}}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(3+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 3 \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(2+\frac{3}{n}\right) = 2$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{3}{2}$.

Exercice 14.

En utilisant la méthode de votre choix, déterminer la limite des suites suivantes.

a. (u_n) est définie par $u_n = n^3 + n^2 - 4$.

b. (v_n) est définie par $v_n = n^3 - n^2 - 4$.

c. (w_n) est définie par $w_n = \dfrac{n^3}{n^2-4}$.

d. (a_n) est définie par $a_n = n^3 + \dfrac{\cos(n)}{n^2-4}$.

limite, forme indéterminée, comparaison

Exercice 14.

a.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^3\left(1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{4}{n^3}\right)$.

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = \frac{n^3}{n^2\left(1-\dfrac{4}{n^2}\right)} = \frac{n}{1-\dfrac{4}{n^2}}.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty.$$

d. En partant de $-1 \leqslant cos(n) \leqslant 1$, pour tout entier $n > 2$, on trouve

$$n^3 - \frac{1}{n^2-4} \leqslant a_n.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n^3 - \frac{1}{n^2-4}\right) = +\infty.$$

Donc, d'après le théorème de comparaison,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

Exercice 15.

Calculer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{-3n}{2e^{-n}}$

2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}(3n-4)$

3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{-2n^3}{n^2+5n+1}$

4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{5n-n^2}{2n^4-6n^2}$

limite, forme indéterminée

Exercice 15.

1. Pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\frac{-3n}{2\mathrm{e}^{-n}} = -\frac{3}{2}n\mathrm{e}^{n}.$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{n} = +\infty$. Ainsi, par produit,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-3n}{2\mathrm{e}^{-n}} = -\infty.$$

2. Pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\frac{2}{\sqrt{n}}(3n-4) = 2\left(3\sqrt{n} - \frac{4}{\sqrt{n}}\right) = 6\sqrt{n} - \frac{8}{\sqrt{n}}.$$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Donc, par somme,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}(3n-4) = +\infty.$$

3. Pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\frac{-2n^3}{n^2+5n+1} = \frac{-2n^3}{n^2\left(1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{-2n}{1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}.$$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 1$. Donc, par quotient,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-2n^3}{n^2+5n+1} = -\infty.$$

4. Pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\frac{5n-n^2}{2n^4-6n^2} = \frac{n^2\left(\frac{5}{n}-1\right)}{2n^4\left(1-\frac{3}{n^2}\right)} = \frac{\frac{5}{n}-1}{2n^2\left(1-\frac{3}{n^2}\right)}.$$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{n}-1\right) = -1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1-\frac{3}{n^2}\right) = 1$. Ainsi, par quotient,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{5n-n^2}{2n^4-6n^2} = 0.$$

Exercice 16.

Déterminer la limite des suites définies, pour tout entier naturel n non nul, par les expressions suivantes.

1. $u_n = 3 + \frac{1}{n^2}$

2. $v_n = nu_n$

3. $w_n = \frac{u_n}{n}$

4. $z_n = \frac{u_n - 5}{u_n - 3}$

limite, forme indéterminée

Exercice 16.

1. On a
$$u_n = 3 + \frac{1}{n^2}.$$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Donc, par somme,
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 3.$$
2. Pour tout entier naturel $n \geq 1$,
$$v_n = nu_n = n\left(3 + \frac{1}{n^2}\right) = 3n + \frac{1}{n}.$$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Donc, par somme,
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$
3. Pour tout entier naturel $n \geq 1$,
$$w_n = \frac{u_n}{n} = \frac{3 + \frac{1}{n^2}}{n} = \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3}.$$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$. Donc, par somme,
$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 0.$$
4. Pour tout entier naturel $n \geq 1$,
$$z_n = \frac{u_n - 5}{u_n - 3} = \frac{3 + \frac{1}{n^2} - 5}{3 + \frac{1}{n^2} - 3} = \frac{-2 + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = -2n^2 + 1.$$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2n^2 + 1) = -\infty$. Ainsi,
$$\lim_{n\to+\infty} z_n = -\infty.$$

Exercice 17.

Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par
$$u_n = (n+1)^2 + (-1)^n \times n.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n^2$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

comparaison

Exercice 17.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.
   Donc $(n+1)^2 - n \leq u_n \leq (n+1)^2 + n$.
   Donc $n^2 + n + 1 \leq u_n \leq n^2 + 3n + 1$.
   Or $n + 1 > 0$.
   Donc $u_n \geq n^2$.
2. $$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$$
   Donc, d'après le théorème de comparaison,
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Exercice 18.

Soit (u_n) une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 2 + \frac{4}{n+1}.$$

En utilisant le théorème des gendarmes, déterminer la limite de la suite (u_n).

gendarmes

Exercice 18.

$$\lim_{n \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(2 + \frac{4}{n+1}\right) = 2$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 2.$$

Exercice 19.

Soit (u_n) une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$-3 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq -3 + \frac{1}{n^2+1}.$$

Déterminer la limite de la suite (u_n).

gendarmes

Exercice 19.

$$\lim_{n \to +\infty} \left(-3 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -3$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(-3 + \frac{1}{n^2+1}\right) = -3$$

Donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -3.$$

Exercice 20.

Soit (v_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$v_n = -5 + \frac{\cos(n)}{n^2}.$$

Déterminer la limite de la suite (v_n).

gendarmes

Exercice 20.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq \cos(n) \leq 1$.
   Donc $-5 - \dfrac{1}{n^2} \leq v_n \leq -5 + \dfrac{1}{n^2}$.

   $$\lim_{n \to +\infty} \left(-5 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(-5 + \frac{1}{n^2}\right) = -5$$

   Donc d'après le théorème des gendarmes,

   $$\lim_{n \to +\infty} v_n = -5.$$

Exercice 21.

Soit (w_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$w_n = 4 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Déterminer la limite de la suite (w_n).

gendarmes

Exercice 21.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.
   Donc $4 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq w_n \leq 4 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(4 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(4 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 4$$

   Donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 4.$$

Exercice 22.

Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$u_n = 42 - \frac{\sin(n)}{n^5}.$$

Déterminer la limite de la suite (u_n).

gendarmes

Exercice 22.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$.
   Donc $42 - \dfrac{1}{n^5} \leq u_n \leq 42 + \dfrac{1}{n^5}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(42 - \frac{1}{n^5}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(42 + \frac{1}{n^5}\right) = 42$$

   Donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 42.$$

Exercice 23.

Pour chaque suite ci-dessous, déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

a. (u_n) est la suite géométrique de raison 0,6 et de premier terme $u_1 = -2$.

b. (v_n) est la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = -4 \times 3^n$.

suite géométrique

Exercice 23.

a) $u_n = -2 \times 0,6^{n-1}$.
Or $-1 < 0,6 < 1$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} 0,6^{n-1} = 0.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

b) $3 > 1$ donc

$$\lim_{n \to +\infty} 3^n = +\infty.$$

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty.$$

Exercice 24.

Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = a_n + 0{,}5a_n.$$

1. Déterminer la nature de la suite (a_n) en justifiant.
2. Déterminer la limite de la suite (a_n).

suite géométrique

Exercice 24.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 1{,}5\,a_n$.
   Donc (a_n) est une suite géométrique de raison 1,5 et de premier terme $a_0 = -1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = -1 \times 1{,}5^n$.
   $1{,}5 > 1$ donc

   $$\lim_{n \to +\infty} 1{,}5^n = +\infty.$$

   Donc

   $$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty.$$

Exercice 25.

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2^n - 0{,}5^n$.
Déterminer la limite de la suite (u_n).

suite géométrique

Exercice 25.

$2 > 1$, donc $\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$.
$-1 < 0{,}5 < 1$. Donc $\lim_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$.
Donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 26.

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 3^n - 2^n$.
En factorisant par 3^n, déterminer la limite de la suite (u_n).

suite géométrique

Exercice 26.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n\left(1 - \dfrac{2^n}{3^n}\right)$.
Donc

$$u_n = 3^n\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

$$-1 < \frac{2}{3} < 1 \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 1.$$

$$3 > 1 \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} 3^n = +\infty.$$

$$\text{Donc } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Exercice 27.

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 2^n - 5^n$.
En factorisant par 2^n, déterminer la limite de la suite (v_n).

suite géométrique

Exercice 27.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n\left(1 - \dfrac{5^n}{2^n}\right)$.

Donc

$$v_n = 2^n\left(1 - \left(\frac{5}{2}\right)^n\right).$$

$$2 > 1 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty.$$

$$\frac{5}{2} > 1 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n = +\infty.$$

$$\text{Donc } \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \left(\frac{5}{2}\right)^n\right) = -\infty.$$

$$\text{Donc } \lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty.$$

Exercice 28.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n}.$$

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
2. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

limite, suite arithmétique

Exercice 28.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} \\
&= \frac{1}{\dfrac{9}{6 - u_n} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} \\
&= \frac{6 - u_n}{9 - 3(6 - u_n)} - \frac{1}{u_n - 3} \\
&= \frac{6 - u_n}{-9 + 3u_n} - \frac{1}{u_n - 3} \\
&= \frac{6 - u_n}{3(u_n - 3)} - \frac{1}{u_n - 3} \\
&= \frac{6 - u_n - 3}{3(u_n - 3)} \\
&= \frac{3 - u_n}{3(u_n - 3)} \\
&= -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

   Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = -\frac{1}{3}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + n \times r$.
   Or $v_0 = \frac{1}{u_0 - 3} = -\frac{1}{6}$ donc

$$v_n = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3}n = \frac{-1 - 2n}{6}.$$

   Or $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$, donc $u_n = \frac{1}{v_n} + 3$ et ainsi

$$u_n = \frac{6}{-1 - 2n} + 3.$$

3. $\lim\limits_{n \to +\infty} (-1 - 2n) = -\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{-1 - 2n} = 0$.
   Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

Exercice 29.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $u_0 = 5$.

1. Déterminer la limite de la suite (u_n).
2. Déterminer l'expression de la somme des n premiers termes de la suite (u_n) en fonction de n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

suite géométrique, somme

Exercice 29.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
   Or $-1 < \frac{1}{4} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$.
   Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2. Soit q la raison de la suite (u_n).
On a

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} \\ &= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \cdots + u_0 \times q^{n-1} \\ &= u_0(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) \\ &= u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}. \end{aligned}$$

Ici $u_0 = 5$ et $q = \frac{1}{4}$, donc

$$S_n = 5 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{20}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right).$$

Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{20}{3}$.

Exercice 30.

Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $u_1 = 4$. Soit S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n).

1. Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.
2. Déterminer la limite S_n quand n tend vers $+\infty$.

suite géométrique, somme

Exercice 30.

1. Soit q la raison de la suite (u_n).

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n \\ &= u_1 + u_1 \times q + u_1 \times q^2 + \cdots + u_1 \times q^{n-1} \\ &= u_1(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) \\ &= u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}. \end{aligned}$$

Avec $u_1 = 4$ et $q = \frac{1}{5}$,

$$S_n = 4 \times \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}} = 5\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right).$$

2. $-1 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) = 1$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 5$.

Exercice 31.

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = -n^3 - \sqrt{n^2+5}.$$

1. Justifier que $v_n \leq -n^3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la limite de la suite (v_n).

comparaison

Exercice 31.

1.
$$\sqrt{n^2+5} \geq 0$$
$$-\sqrt{n^2+5} \leq 0$$
$$-n^3 - \sqrt{n^2+5} \leq -n^3$$
Donc
$$v_n \leq -n^3$$
2.
$$\lim_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$$
Donc d'après le théorème de comparaison,
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty.$$

Exercice 32.

Calculer les limites des suites ci-dessous définies pour tout entier naturel n.

1. $u_n = 0{,}5^n$
2. $v_n = (\sqrt{2})^n$
3. $w_n = \dfrac{1}{3^n}$
4. $z_n = \dfrac{9^n}{4^n}$

suite géométrique

Exercice 32.

1. On a $u_n = 0{,}5^n$. Comme $-1 < 0{,}5 < 1$, on sait que
$$\lim_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0.$$
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. On a $v_n = (\sqrt{2})^n$. Or $\sqrt{2} > 1$, donc
$$\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{2})^n = +\infty.$$
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
3. On a $w_n = \dfrac{1}{3^n} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. Comme $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$,
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0.$$
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

4. On a
$$z_n = \frac{9^n}{4^n} = \left(\frac{9}{4}\right)^n.$$
Or $\frac{9}{4} > 1$, donc
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{9}{4}\right)^n = +\infty,$$
et ainsi $\lim_{n\to+\infty} z_n = +\infty$.

Exercice 33.

Calculer les limites des suites ci-dessous, définies pour tout entier naturel n.

1. $u_n = -3 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n$
2. $v_n = 1 + 2 \times 0{,}99^n$
3. $w_n = 5 \times 1{,}99^n + 12$
4. $z_n = 8 + \sqrt{3}\left(-\frac{7}{8}\right)^n$

suite géométrique

Exercice 33.

1. On a $u_n = -3 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n$. Comme $-1 < -\frac{1}{4} < 1$,
$$\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0,$$
donc, par produit,
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -3 \times 0 = 0.$$
2. On a $v_n = 1 + 2 \times 0{,}99^n$. Comme $-1 < 0{,}99 < 1$,
$$\lim_{n\to+\infty} 0{,}99^n = 0,$$
et par produit puis par somme,
$$\lim_{n\to+\infty} 2 \times 0{,}99^n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = 1 + 0 = 1.$$
3. On a $w_n = 5 \times 1{,}99^n + 12$. Or $1{,}99 > 1$, donc
$$\lim_{n\to+\infty} 1{,}99^n = +\infty$$
et, par produit,
$$\lim_{n\to+\infty} 5 \times 1{,}99^n = +\infty.$$
Par somme, $\lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.
4. On a $z_n = 8 + \sqrt{3}\left(-\frac{7}{8}\right)^n$. Comme $-1 < -\frac{7}{8} < 1$,
$$\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{7}{8}\right)^n = 0,$$
et donc, par produit puis par somme,
$$\lim_{n\to+\infty} z_n = 8 + \sqrt{3} \times 0 = 8.$$

Exercice 34.

Calculer les limites des suites ci-dessous, définies pour tout entier naturel n.

1. $u_n = \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}$
2. $v_n = 1+\dfrac{1-(\sqrt{2})^n}{1-\sqrt{2}}$
3. $w_n = -3\times\left(\dfrac{1}{10}\right)^n + \dfrac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1-\dfrac{2}{3}}$

suite géométrique

Exercice 34.

1. On a
$$u_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}.$$
Comme $-1<\frac{1}{2}<1$, on obtient
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$
Par différence, le numérateur vérifie
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-(1/2)^n\right) = 1-0 = 1.$$
Le dénominateur vaut $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, constant non nul. Ainsi,
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1/2} = 2.$$
2. On a
$$v_n = 1+\frac{1-(\sqrt{2})^n}{1-\sqrt{2}} = 1+\frac{(\sqrt{2})^n-1}{\sqrt{2}-1}.$$
Comme $\sqrt{2}>1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{2})^n=+\infty$, donc
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt{2})^n-1}{\sqrt{2}-1} = +\infty$$
(car le dénominateur $\sqrt{2}-1$ est positif). Par somme,
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$
3. On a
$$w_n = -3\left(\frac{1}{10}\right)^n + \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}.$$

Comme $-1 < \dfrac{1}{10} < 1$ et $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} -3\left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$$

et, pour le second terme,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-(2/3)^n\right) = 1, \qquad 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-(2/3)^n}{1-2/3} = \frac{1}{1/3} = 3.$$

Par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 0+3 = 3.$$

Exercice 35.

Soit (S_n) la somme définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$S_n = 1+5+5^2+5^3+\cdots+5^n.$$

1. Exprimer S_n en fonction de n.
2. Déterminer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$ en justifiant.

suite géométrique, somme

Exercice 35.

1. $S_n = \dfrac{1-5^{n+1}}{1-5} = -\dfrac{1}{4} \times \left(1-5^{n+1}\right)$.
2. $5 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-5^{n+1}\right) = -\infty$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Exercice 36.

Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 2+0{,}7^n$.

1. Conjecturer la limite de la suite (u_n).
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.
3. On admet que la suite (u_n) est strictement décroissante. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel n tel que :
   a. $u_n < 2{,}1$,
   b. $u_n < 2{,}01$,
   c. $u_n < 2{,}001$.

suite géométrique, calculatrice

Exercice 36.

1. On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0{,}7^n > 0$ donc $2+0{,}7^n > 2$. Donc $u_n > 2$.
3. **a.** $n = 7$
   b. $n = 13$
   c. $n = 20$

Exercice 37.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n.$$

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 3n - 5$.

1. Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n).
2. En déduire les limites des suites :
   a. $(u_n + v_n)$;
   b. $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$;
   c. $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$.

limite, suite géométrique

Exercice 37.

1. (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Or $-1 < \frac{1}{3} < 1$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0^+.$$

Pour (v_n) on a :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$

2. a.

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty.$$

b.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 0.$$

c.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{v_n}{u_n}\right) = +\infty.$$

Exercice 38.

En utilisant les théorèmes de comparaison, déterminer dans chaque cas la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

1. $u_n = 5n^2 - 2(-1)^n$
2. $u_n = n^2 - 2n + (-1)^{n+1}$
3. $u_n = (-1)^n \times \frac{\sqrt{n}}{n}$

comparaison, gendarmes

Exercice 38.

1. $-1 \leq (-1)^n \leq 1 \iff -2 \leq -2(-1)^n \leq 2$
   $\iff 5n^2 - 2 \leq 5n^2 - 2(-1)^n \leq 5n^2 + 2,$
   donc $5n^2 - 2 \leq u_n \leq 5n^2 + 2$. Or

$$\lim_{n\to+\infty} (5n^2 - 2) = +\infty.$$

D'après le théorème de comparaison,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

2. De la même manière que précédemment,

$$n^2-2n-1 \leq u_n \leq n^2-2n-1.$$

Or $n^2-2n-1 = n^2\left(1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$ et $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=1.$$

Par produit,

$$\lim_{n\to+\infty}(n^2-2n-1)=+\infty.$$

D'après le théorème de comparaison,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

3. De la même manière que précédemment,

$$-\frac{\sqrt{n}}{n} \leq u_n \leq \frac{\sqrt{n}}{n},$$

donc

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Exercice 39.

Déterminer la limite des suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

1. $u_n = 6^n - 10^n$
2. $v_n = \dfrac{5^n-1}{3^n}$
3. $w_n = \dfrac{5^n-2^n}{8^n}$

suite géométrique

Exercice 39.

1. On a

$$u_n = 6^n-10^n = 10^n\left(\left(\frac{6}{10}\right)^n-1\right)=10^n\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n-1\right).$$

Or $10>1$, donc

$$\lim_{n\to+\infty}10^n=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=0, \text{ car } -1<\frac{3}{5}<1.$$

Par somme et par produit,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$

2. On a

$$v_n=\frac{5^n-1}{3^n}=\left(\frac{5}{3}\right)^n\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right).$$

Or $\frac{5}{3}>1$, donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=0, \text{ car } -1<\frac{1}{5}<1.$$

Par somme et par produit,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$

3. On a

$$w_n = \frac{5^n - 2^n}{8^n} = \left(\frac{5}{8}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^n = 0, \text{ car } -1 < \frac{5}{8} < 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0, \text{ car } -1 < \frac{1}{4} < 1.$$

Par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 0.$$

Exercice 40.

On dépose une tasse de café dans une pièce dont la température est de 21 °C.
En s'appuyant sur la loi de Newton, on peut démontrer que la température du café (en °C), en fonction du nombre n de minutes écoulées, peut être modélisée par une suite (T_n) vérifiant la relation

$$T_{n+1} = 0{,}97\, T_n + 0{,}63$$

pour tout entier naturel n.

1. On pose, pour tout entier naturel n, $U_n = T_n - 21$. Montrer que la suite (U_n) est géométrique.
2. Justifier que, quelle que soit la valeur de T_0, la suite (T_n) converge vers un réel que l'on précisera. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Écrire, en langage Python, une fonction `tiede` ayant pour argument I, la température initiale du café (supérieure à 30 °C), et qui renvoie le nombre de minutes à attendre pour que la température du café soit en dessous de 30 °C.

suite arithmético-géométrique, python

Exercice 40.

1. Pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = T_{n+1} - 2 = 0{,}97T_n + 0{,}63 - 21 = 0{,}97T_n - 20{,}37 = 0{,}97\big(T_n - 21\big) = 0{,}97U_n.$$

Donc la suite (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}97$ et de premier terme

$$U_0 = T_0 - 21.$$

2. La suite géométrique (U_n) a pour raison $q = 0{,}97$. Or $-1 < q < 1$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} (U_n + 21) = 21.$$

Quelle que soit la température initiale T_0 du café, à terme elle tendra vers 21 °C, la température de la pièce.

3. Programme :

```python
def tiede(I):
    n = 0
    T = I
    while T >= 30:
        n = n + 1
        T = 0.97*T + 0.63
    return n
```

Exercice 41.

Soit (t_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$t_n = \frac{5n-10}{3}.$$

1. Soit A un réel.
   a. Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que $t_N \geq A$.
   b. Prouver que, pour tout $n \geq N$, $t_n \geq A$.
2. En déduire le comportement de la suite (t_n) quand n tend vers $+\infty$.

limite

Exercice 41.

1.
   a. On a
   $$t_N \geq A \Longleftrightarrow \frac{5N-10}{3} \geq A \Longleftrightarrow N \geq \frac{3A+10}{5}.$$
   Ainsi,
   $$N = E\left(\frac{3A+10}{5}\right)+1$$
   convient (où E désigne la partie entière).
   b. Si l'on prend un entier $n \geq N$, alors
   $$n \geq \frac{3A+10}{5} \quad \text{et donc} \quad t_n \geq A.$$
2. On a
$$\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty.$$

Exercice 42.

On considère un carré de côté 3 cm. À chaque étape, on construit un carré dont le côté mesure la moitié du côté du carré de l'étape précédente.
On note A_n l'aire du n-ième carré.

1. Donner la valeur de A_1 et A_2.
2. Exprimer A_{n+1} en fonction de A_n et en déduire la nature de la suite (A_n).
3. Déterminer l'expression de A_n en fonction de n.
4. Déterminer l'expression de l'aire formée par l'ensemble des n premiers carrés, en fonction de n.
5. En déduire l'aire de la figure formée par l'ensemble des carrés si on continue indéfiniment cette construction.

suite géométrique, limite

Exercice 42.

1. $A_1 = 3^2 = 9$ et $A_2 = 1{,}5^2 = 2{,}25$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$A_{n+1} = \frac{A_n}{4}.$$
Donc (A_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$A_n = A_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 9\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

4. Notons S_n l'aire formée par l'ensemble des n premiers carrés.

$$S_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n = 9\left(\frac{1}{4}\right)^0 + 9\left(\frac{1}{4}\right)^1 + \cdots + 9\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

Ainsi

$$S_n = 9\left[\left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right].$$

C'est une somme géométrique, donc

$$S_n = 9 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = 12\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right).$$

5. On a $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$, donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 12.$$

Donc, si l'on continue indéfiniment cette construction, l'aire de la figure formée par l'ensemble des carrés sera 12 cm^2.

Exercice 43.

Un site Internet propose à ses abonnés des films à télécharger. Lors de son ouverture, 500 films sont proposés et chaque mois, le nombre de films proposés aux abonnés augmente de 6 %.

A) On note u_n le nombre de films proposés n mois après l'ouverture du site. On a $u_0 = 500$.

1. Calculer u_1 et u_2 (on arrondira à l'unité).

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

B) On souhaite déterminer à partir de combien de mois le site aura doublé le nombre de films proposés par rapport au nombre de films proposés à l'ouverture.

1. Recopier et compléter le programme en Python ci-contre pour qu'il réponde au problème.

```
u = 500
n = 0
while ... :
    n = ...
    u = ...
print(...)
```

2. Donner la valeur affichée à la fin de l'exécution de ce programme, puis interpréter cette valeur.

C) En raison d'une offre de bienvenue, le nombre d'abonnés au lancement est 15000. Sur la base des premiers mois, on estime que le nombre des clients abonnés au site évolue suivant la règle suivante : chaque mois, 10 % des clients se désabonnent et 2500 nouveaux abonnés sont enregistrés.

On note v_n l'estimation du nombre d'abonnés n mois après l'ouverture, on a ainsi $v_0 = 15000$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a

$$v_{n+1} = 0{,}9 \times v_n + 2500.$$

2. Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = v_n - 25000$.

a. Montrer que (w_n) est une suite géométrique.

b. Déterminer l'expression de w_n puis de v_n en fonction de n.

3. Peut-on prévoir, à l'aide de ce modèle, une stabilisation du nombre d'abonnés sur le long terme ? Si oui, à combien d'abonnés ? Justifier.

suite arithmético-géométrique, python

Exercice 43.

A. **1.** On a

$$u_1 = u_0 \times \left(1+\frac{6}{100}\right) = 530,$$

puis

$$u_2 = u_1 \times \left(1+\frac{6}{100}\right) \approx 562.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1+\frac{6}{100}\right) = 1{,}06\,u_n.$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}06$. On en déduit

$$u_n = u_0 q^n = 500 \times 1{,}06^n.$$

3. Comme $1{,}06 > 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} 1{,}06^n = +\infty \quad \text{et donc} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

B. **1.** Programme :

```python
u = 500
n = 0
while u < 1000:
    n = n + 1
    u = 1.06*u
print(n)
```

2. La valeur affichée à la fin de l'exécution de ce programme est 12. Donc le nombre de films aura doublé à partir de 12 mois (ou un an) après l'ouverture.

C. **1.** Chaque mois, 10 % des personnes se désabonnent et il y a 2 500 nouveaux abonnés. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \left(1-\frac{10}{100}\right)v_n + 2\,500 = 0{,}9\,v_n + 2\,500.$$

2. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} = v_{n+1} - 25\,000 = 0{,}9\,v_n + 2\,500 - 25\,000 = 0{,}9\,v_n - 22\,500.$$

On écrit

$$0{,}9\,v_n - 22\,500 = 0{,}9\left(v_n - \frac{22\,500}{0{,}9}\right) = 0{,}9\,(v_n - 25\,000) = 0{,}9\,w_n.$$

Ainsi, (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$ et de premier terme

$$w_0 = v_0 - 25\,000 = -10\,000.$$

b. On en déduit

$$w_n = w_0 q^n = -10\,000 \times 0{,}9^n.$$

Or $v_n = w_n + 25\,000$, donc

$$v_n = -10\,000 \times 0{,}9^n + 25\,000.$$

3. Comme $-1 < 0{,}9 < 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 25\,000.$$

On peut donc prévoir une stabilisation du nombre d'abonnés, autour de 25 000.

Exercice 44.

Un groupe de presse édite un magazine qu'il propose en abonnement. Jusqu'en 2010, ce magazine était proposé uniquement sous forme papier. Depuis 2011, les abonnés du magazine ont le choix entre la version numérique et la version papier.

Une étude a montré que, chaque année, certains abonnés changent d'avis : 10 % des abonnés à la version papier passent à la version numérique et 6 % des abonnés à la version numérique passent à la version papier. On admet que le nombre global d'abonnés reste constant dans le temps.

On note a_n la proportion d'abonnés ayant choisi la version papier en $2010+n$ et b_n la proportion d'abonnés ayant choisi la version numérique en $2010+n$.

1. Justifier que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = 0{,}9\,a_n + 0{,}06\,b_n.$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = 0{,}84\,a_n + 0{,}06.$$

3. Soit (c_n) la suite définie par $c_n = a_n - 0{,}375$.
   - **a.** Montrer que la suite (c_n) est géométrique.
   - **b.** En déduire l'expression de c_n en fonction de n.
   - **c.** En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n.
   - **d.** En déduire la limite de la suite (a_n).
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle année la proportion d'abonnés à la version papier devient inférieure à la proportion d'abonnés à la version numérique.

suite arithmético-géométrique

Exercice 44.

1. En 2010, le magazine n'est proposé que sous forme papier, donc

$$a_0 = 100\,\% = 1 \quad \text{et} \quad b_0 = 0\,\% = 0.$$

Chaque année :

- 10 % des abonnés à la version papier passent à la version numérique ;
- 6 % des abonnés à la version numérique passent à la version papier ;
- le nombre global d'abonnés reste constant.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \left(1 - \frac{10}{100}\right) a_n + \frac{6}{100} b_n = 0{,}9\,a_n + 0{,}06\,b_n.$$

2. Pour tout n, on a $a_n + b_n = 1$. Ainsi,

$$a_{n+1} = 0{,}9\,a_n + 0{,}06(1 - a_n) = 0{,}9\,a_n + 0{,}06 - 0{,}06\,a_n = 0{,}84\,a_n + 0{,}06.$$

3. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_{n+1} = a_{n+1} - 0{,}375 = 0{,}84\,a_n + 0{,}06 - 0{,}375 = 0{,}84\,a_n - 0{,}315.$$

On écrit

$$0{,}84\,a_n - 0{,}315 = 0{,}84\left(a_n - \frac{0{,}315}{0{,}84}\right) = 0{,}84(a_n - 0{,}375) = 0{,}84\,c_n.$$

Donc (c_n) est une suite géométrique de raison 0,84 et de premier terme

$$c_0 = a_0 - 0{,}375 = 0{,}625.$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = 0{,}625 \times 0{,}84^n.$$

c. Comme $c_n = a_n - 0{,}375$, on a

$$a_n = c_n + 0{,}375 = 0{,}625 \times 0{,}84^n + 0{,}375.$$

De plus,

$$b_n = 1 - a_n = 0{,}625 - 0{,}625 \times 0{,}84^n.$$

d. On a $-1 < 0{,}84 < 1$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} 0{,}84^n = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0{,}375.$$

4. On cherche le plus petit entier n tel que $a_n \leq b_n$, c'est-à-dire $a_n < 0{,}5$. À l'aide de la calculatrice, on trouve $n = 10$. Donc, en 2020, la proportion d'abonné·e·s à la version papier devient inférieure à la proportion d'abonné·e·s à la version numérique.