

EXERCICES

Logarithme

Mots clés : équations simples, équations, inéquations simples, inéquations, règles de calculs, variations, limites simples, limites, TVI

Exercice 1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $2e^x - 3 = 0$.
2. $e^{-x+1} - 1 = 0$.
3. $e^{2x} = 4$.
4. $(2e^x - 1)(e^x + 5) = 0$.

équations simples

Exercice 1.

1. $2e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$. Ainsi, $S = \left\{\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right\}$.
2. $e^{-x+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-x+1} = e^0 \Leftrightarrow -x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ainsi, $S = \{1\}$.
3. $e^{2x} = 4 \Leftrightarrow 2x = \ln 4 \Leftrightarrow x = \ln(2)$. Ainsi, $S = \{\ln(2)\}$.
4. $(2e^x - 1)(e^x + 5) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 = 0$ ou $e^x + 5 = 0$
 $2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$. L'équation $e^x = -5$ n'a pas de solution car pour tout x réel, $e^x > 0$.
 $S = \{-\ln(2)\}$.

Exercice 2.

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $\ln(x) < 3$.
2. $2\ln(x) + 200 > 0$.
3. $1 - 2\ln(x) \geq 0$.
4. $2\ln(x) - 4\ln(3) < 0$.

inéquations simples

Exercice 2.

1. L'inéquation est définie sur $]0; +\infty[$. $\ln(x) < 3 \Leftrightarrow x < e^3$. Donc, $S =]0; e^3[$.
2. L'inéquation est définie sur $]0; +\infty[$.
 $2\ln(x) + 200 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -100 \Leftrightarrow x > e^{-100}$. Donc, $S =]e^{-100}; +\infty[$.
3. L'inéquation est définie sur $]0; +\infty[$.
 $1 - 2\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq \sqrt{e}$. Donc, $S =]0; \sqrt{e}]$.
4. L'inéquation est définie sur $]0; +\infty[$.
 $2\ln(x) - 4\ln(3) < 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 2\ln(3) \Leftrightarrow x < 9$. Donc, $S =]0; 9[$.

Exercice 3.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $-5e^x - 10 = 0$
2. $7 - e^{5x-2} = 0$

3. $e^{-3x} = -8$
4. $e^x(e^x - 9) = 0$
5. $e^{2x} + 3e^x = 0$

équations simples

Exercice 3.

1. $-5e^x - 10 = 0 \Leftrightarrow e^x = -2$, l'équation $e^x = -2$ n'a pas de solution car pour tout x réel, $e^x > 0$. Ainsi, $S = \emptyset$.
2. $7 - e^{5x-2} = 0 \Leftrightarrow e^{5x-2} = 7 \Leftrightarrow 5x - 2 = \ln(7)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(7) + 2}{5}.$$

$$\text{Ainsi, } S = \left\{ \frac{\ln(7)+2}{5} \right\}.$$

3. L'équation $e^{-3x} = -8$ n'a pas de solution car pour tout x réel, $e^x > 0$. Ainsi, $S = \emptyset$.
4. $e^x(e^x - 9) = 0 \Leftrightarrow e^x - 9 = 0$ ou $e^x = 0$, or l'équation $e^x = 0$ n'a pas de solution car pour tout x réel, $e^x > 0$. $e^x - 9 = 0 \Leftrightarrow e^x = 9 \Leftrightarrow x = \ln(9)$. Ainsi, $S = \{\ln(9)\}$.
5. $e^{2x} + 3e^x = 0 \Leftrightarrow e^x(e^x + 3) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0$ ou $e^x = -3$. Or pour tout réel x , $e^x > 0$, donc $S = \emptyset$.

Exercice 4.

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes, définies par :

- a. $f(x) = \ln(3x - 7)$
- b. $g(x) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$
- c. $h(x) = \ln(x) - 3\ln(2 - x)$

ensemble de définition

Exercice 4.

- a. $3x - 7 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{7}{3}$. Donc $D_f =]\frac{7}{3}; +\infty[$.
- b. $-x^2 + 4x - 3 > 0$, $\Delta = 4$ et $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$.
Donc $D_f =]1; 3[$.
- c. $\begin{cases} x > 0 \\ 2 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 2 \end{cases}$. Donc $D_f =]0; 2[$.

Exercice 5.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\ln(x) = 3$
2. $\ln(x) = -7$
3. $2\ln(x) - 1 = 0$
4. $(\ln(x) + 5)(4\ln(x) - 5) = 0$
5. $(\ln(x))^2 = 9$

équations simples

Exercice 5.

1. $\ln(x) = 3 \Leftrightarrow x = e^3$. Ainsi, $S = \{e^3\}$.
2. $\ln(x) = -7 \Leftrightarrow x = e^{-7}$. Ainsi, $S = \{e^{-7}\}$

3. $2\ln(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$. Ainsi, $S = \{\sqrt{e}\}$.

4. $(\ln(x) + 5)(4\ln(x) - 5) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 5 = 0$ ou $4\ln(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-5}$ ou $x = e^{\frac{5}{4}}$. Ainsi, $S = \{e^{-5}; e^{\frac{5}{4}}\}$.

5. $(\ln(x))^2 = 9 \Leftrightarrow \ln(x) = 3$ ou $\ln(x) = -3 \Leftrightarrow x = e^3$ ou $x = e^{-3}$. Ainsi, $S = \{e^{-3}; e^3\}$.

Exercice 6.

Simplifier les expressions suivantes :

1. $a = \ln(e^4) + 3\ln(e^{-1})$.

2. $b = e^{2\ln 5} - \ln((e^5)^2)$.

3. $c = \ln(e^{-3}) \times \ln(e^3)$.

4. $d = 20\ln(\sqrt{e}) - e^{3\ln 3}$.

règles de calculs

Exercice 6.

1. $a = \ln(e^4) + 3\ln(e^{-1}) = 4 - 3 = 1$.

2. $b = e^{2\ln 5} - \ln((e^5)^2) = 25 - 10 = 15$.

3. $c = \ln(e^{-3}) \times \ln(e^3) = -3 \times 3 = -9$.

4. $d = 20\ln(\sqrt{e}) - e^{3\ln 3} = 10 - 27 = -17$.

Exercice 7.

Déterminer la valeur exacte du nombre réel :

$$A = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \dots + \ln\left(\frac{49}{50}\right).$$

règles de calculs

Exercice 7.

$$\begin{aligned} A &= \ln(1) - \ln(2) + \ln(2) - \ln(3) + \dots + \ln(49) - \ln(50) \\ &= -\ln(50). \end{aligned}$$

Exercice 8.

Soit f la fonction définie, pour tout réel x , par

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x}).$$

Démontrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = -x + \ln(1 + e^x).$$

règles de calculs

Exercice 8.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1 + e^{-x}) = \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right) \\ &= \ln(e^x + 1) - \ln(e^x) = \ln(e^x + 1) - x. \end{aligned}$$

Exercice 9.

1. Démontrer que pour tout réel $x > -1$, on a :

$$2\ln(x+1) = \ln(x^2 + 2x + 1).$$

2. Démontrer que, pour tout réel x , on a :

$$\ln(1 + e^{-2x}) = -2x + \ln(1 + e^{2x}).$$

règles de calculs

Exercice 9.

1. Pour tout $x > -1$, on a :

$$2\ln(x+1) = \ln((x+1)^2) = \ln(x^2 + 2x + 1).$$

2. Pour tout réel x , on a :

$$\begin{aligned}\ln(1 + e^{-2x}) &= \ln\left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right) = \ln\left(\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x}}\right) \\ &= \ln(e^{2x} + 1) - \ln(e^{2x}) = \ln(e^{2x} + 1) - 2x.\end{aligned}$$

Exercice 10.

Pour chaque question, déterminer la seule réponse exacte parmi les trois proposées.

1. Soit x un nombre réel strictement positif. $\ln(2x+4) - \ln(2x)$ est égal à :

a. $\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$

b. $\frac{\ln(2x+4)}{\ln(2x)}$

c. $2\ln(2)$

2. Pour tout réel x , $\ln\left(\frac{e^x}{2}\right) - \ln(e^{x-3})$ est égal à :

a. $-3 - \ln(2)$

b. $3 - \ln(2)$

c. $-3 + \ln(2)$

règles de calculs

Exercice 10.

1. Réponse a.

2. Réponse b.

Exercice 11.

Simplifier les nombres suivants pour les écrire en fonction de $\ln(3)$ uniquement.

1. $a = \ln(9).$

2. $b = \ln\left(\frac{1}{3}\right).$

3. $c = \ln(3\sqrt{3}).$

4. $d = \ln(36) - 2\ln(2).$

règles de calculs

Exercice 11.

1. $a = \ln(9) = \ln(3^2) = 2\ln(3).$

2. $b = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3).$

3. $c = \ln(3\sqrt{3}) = \ln(3) + \frac{1}{2}\ln(3) = \frac{3}{2}\ln(3).$

4. $d = \ln(36) - 2\ln(2) = \ln\left(\frac{36}{4}\right) = \ln(9) = 2\ln(3).$

Exercice 12.

Simplifier les nombres suivants pour les écrire en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$ uniquement.

1. $a = \ln(10) - \ln\left(\frac{1}{4}\right).$

2. $b = \ln(0,05).$

3. $c = \ln\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right).$

4. $d = 2\ln(5e^2) + \ln(4e^{-1}).$

règles de calculs

Exercice 12.

1. $a = \ln(10) - \ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln(2) + \ln(5) + 2\ln(2)$

$$= 3\ln(2) + \ln(5).$$

2. $b = \ln(0,05) = \ln(5 \times 10^{-2}) = \ln(5) - 2\ln(2) - 2\ln(5)$

$$= -2\ln(2) - \ln(5).$$

3. $c = \ln\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln(5) - \ln(2).$

4. $d = 2\ln(5e^2) + \ln(4e^{-1}) = 2\ln(5) + 4 + 2\ln(2) - 1$

$$= 2\ln(2) + 2\ln(5) + 3.$$

Exercice 13.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $(e^x - 3)\ln(x+1) < 0.$

2. $\ln(e^x - 2) < 0.$

3. $\ln(-x^2 + 4x + 5) < \ln(x+1).$

inéquations

Exercice 13.

1. $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1.$ On en déduit que l'équation est définie sur l'intervalle $] -1; +\infty[.$

$$e^x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \ln(3) \text{ et } \ln(x+1) > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

x	-1	0	$\ln(3)$	$+\infty$
$e^x - 3$	-	-	0	+
$\ln(x+1)$	-	0	+	+
produit	+	0	-	+

Donc $S =]0; \ln(3)[.$

2. $e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \ln(2).$ On en déduit que l'équation est définie sur l'intervalle $] \ln(2); +\infty[.$

$$\ln(e^x - 2) < 0 \Leftrightarrow e^x - 2 < 1 \Leftrightarrow e^x < 3 \Leftrightarrow x < \ln(3).$$

Donc $S =] \ln(2); \ln(3)[.$

$$3. \begin{cases} -x^2 + 4x + 5 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 5 \\ x > -1 \end{cases}$$

On en déduit que l'équation est définie sur l'intervalle $] -1; 5[$. $\ln(-x^2 + 4x + 5) < \ln(x + 1) \Leftrightarrow -x^2 + 3x + 4 < 0$

$$\Leftrightarrow -(x - 4)(x + 1) < 0.$$

Donc $S =]4; 5[$.

Exercice 14.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $2(\ln(x))^2 \leq 5\ln(x)$.
2. $x\ln(x - 2) < 0$.
3. $(\ln(x) - 1)(3 - \ln(x)) \geq 0$.

inéquations

Exercice 14.

1. L'inéquation est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

$$2(\ln(x))^2 \leq 5\ln(x) \Leftrightarrow \ln(x)[2\ln(x) - 5] \leq 0.$$

$$\text{Or, } \ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ et } 2\ln(x) - 5 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x > e^{\frac{5}{2}}.$$

x	0	1	$e^{\frac{5}{2}}$	$+\infty$
$\ln(x)$	-	0	+	+
$2\ln(x) - 5$	-	0	-	+
produit	+	0	-	+

Donc $S = [1; e^{\frac{5}{2}}]$.

2. $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$. On en déduit que l'inéquation est définie sur l'intervalle $]2; +\infty[$. Ainsi, pour $x > 2$, $x\ln(x - 2)$ est du signe de $\ln(x - 2)$. Or $\ln(x - 2) < 0 \Leftrightarrow x < 3$. Donc $S =]2; 3[$.

3. L'inéquation est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

$$\ln(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow x > e \text{ et } 3 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 3 \Leftrightarrow x < e^3.$$

x	0	e	e^3	$+\infty$
$\ln(x) - 1$	-	0	+	+
$3 - \ln(x)$	+	0	+	-
produit	-	0	+	-

Donc $S = [e; e^3]$.

Exercice 15.

Déterminer la limite en a des fonctions f et g suivantes définies sur $]0; +\infty[$.

1. $f(x) = 2(\ln(x))^2 + 3\ln(x) + 1$, avec $a = +\infty$.
2. $g(x) = -(\ln(x))^2 + \ln(x)$, avec $a = 0$.

Exercice 15.

1. $f(x) = 2(\ln(x))^2 + 3\ln(x) + 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} X^2 = +\infty.$$

Par composée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2(\ln(x))^2 = +\infty.$

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3\ln(x) + 1 = +\infty.$

Donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} X^2 = +\infty.$

Par composée, $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x))^2 = +\infty$ et par produit,

$$\lim_{x \rightarrow 0} -(\ln(x))^2 = -\infty. \text{ De plus, } \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty, \text{ par somme } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty.$$

Exercice 16.

Déterminer la limite en a des fonctions f et g suivantes définies sur $]0; +\infty[$.

1. $f(x) = (e^x - 1)(2 - \ln(x))$, avec $a = +\infty$.

2. $g(x) = \frac{\ln(x) - 1}{x}$, avec $a = 0$.

limites simples

Exercice 16.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \ln(x)) = -\infty$. Par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) - 1 = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty.$

Par produit, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty.$

Exercice 17.

Déterminer les limites des fonctions f et g suivantes aux bornes de leur ensemble de définition E .

1. $f(x) = \ln(2x - 6)$ et $E =]3; +\infty[$

2. $g(x) = \ln(e^x + 3)$ et $E = \mathbb{R}$

limites simples

Exercice 17.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 6 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty.$

Par composée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x - 6) = +\infty.$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} 2x - 6 = 0 \text{ et } \lim_{X \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty.$$

Par composée, $\lim_{x \rightarrow 3} \ln(2x - 6) = -\infty.$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 3 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty.$

Par composée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 3) = +\infty.$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 3 = 3 \text{ et } \lim_{X \rightarrow 3} \ln(X) = \ln(3).$$

Par composée, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 3) = \ln(3).$

Exercice 18.

Résoudre les équations suivantes après avoir déterminé sur quel ensemble on peut les résoudre.

1. $\ln(x) = \ln(x+2)$
2. $\ln(-x+3) = \ln(3x+5)$
3. $\ln(2x^2+4) = \ln(-5x+1)$

équations

Exercice 18.

$$1. \begin{cases} x > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -2 \end{cases}.$$

L'équation est donc définie sur $]0; +\infty[$. $\ln(x) = \ln(x+2) \Leftrightarrow x = x+2 \Leftrightarrow 0 = 2$. Impossible, donc $S = \emptyset$.

$$2. \begin{cases} -x+3 > 0 \\ 3x+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > -\frac{5}{3} \end{cases}.$$

L'équation est donc définie sur $]-\frac{5}{3}; 3[$.

$$\ln(-x+3) = \ln(3x+5) \Leftrightarrow -x+3 = 3x+5 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

$-\frac{1}{2}$ est bien dans l'ensemble de définition, donc, $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

$$3. \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R}, 2x^2+4 > 0 \text{ et } -5x+1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{5}.$$

L'équation est donc définie sur $]-\infty; \frac{1}{5}[$.

$$\ln(2x^2+4) = \ln(-5x+1) \Leftrightarrow 2x^2+4 = -5x+1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+5x+3 = 0.$$

$$\Delta = 1, x_1 = -1, x_2 = -\frac{3}{2}. \text{ Donc, } S = \left\{-\frac{3}{2}; -1\right\}.$$

Exercice 19.

Résoudre les équations suivantes après avoir déterminé sur quel ensemble on peut les résoudre.

1. $\ln(x^2) = \ln(x) + \ln(6)$
2. $\ln(x+1) + \ln(x-4) = \ln(5)$
3. $2\ln(x) = \ln(5x-3)$

équations

Exercice 19.

1. L'équation est définie sur $]0; +\infty[$.

$$\ln(x^2) = \ln(x) + \ln(6) \Leftrightarrow \ln(x^2) = \ln(6x) \Leftrightarrow x^2 = 6x \Leftrightarrow x(x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 6. \text{ Donc } S = \{6\}.$$

2. L'équation est définie sur $]4; +\infty[$.

$$\ln(x+1) + \ln(x-4) = \ln(5) \Leftrightarrow \ln((x+1)(x-4)) = \ln(5)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-4) = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 9 = 0.$$

$$\Delta = 45, x_1 = \frac{3-3\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{3+3\sqrt{5}}{2}. \text{ Donc, } S = \left\{\frac{3+3\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

3. $5x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{5}$.

Donc, l'équation est définie sur $] \frac{3}{5}; +\infty[$.

$$2\ln(x) = \ln(5x - 3) \Leftrightarrow \ln(x^2) = \ln(5x - 3) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 = 0.$$

$$\Delta = 13, x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}, x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Donc, } S = \left\{ \frac{5 - \sqrt{13}}{2}; \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \right\}.$$

Exercice 20.

Résoudre les équations suivantes après avoir déterminé sur quel ensemble on peut les résoudre.

1. $\ln((x - 3)(2x + 1)) = \ln(4)$

2. $\ln(x - 3) + \ln(2x + 1) = 3\ln(2)$

équations

Exercice 20.

1. Le trinôme $(x - 3)(2x + 1)$ a le signe de $a = 2$ donc est positif à l'extérieur des racines donc l'ensemble de définition de l'équation est $] -\infty; -\frac{1}{2}[\cup]3; +\infty[$.

$$\ln[(x - 3)(2x + 1)] = \ln(4) \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 7 = 0.$$

$$\Delta = 81, x_1 = -1, x_2 = \frac{7}{2}. \text{ Donc, } S = \left\{ -1; \frac{7}{2} \right\}.$$

2. L'équation est définie sur $]3; +\infty[$.

$$\ln(x - 3) + \ln(2x + 1) = 2\ln(2) \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 7 = 0.$$

$$-1 \notin]3; +\infty[\text{ donc, } S = \left\{ \frac{7}{2} \right\}.$$

Exercice 21.

Résoudre les inéquations suivantes après avoir déterminé sur quel ensemble on peut les résoudre.

1. $\ln(3x - 4) < 0$

2. $\ln(-x + 3) \geq 1$

3. $\ln(-x + 1) \leq \ln(x)$

4. $\ln(3 + 2x) < \ln(x - 3)$

équations

Exercice 21.

1. L'inéquation est définie sur $] \frac{4}{3}; +\infty[$.

$$\ln(3x - 4) < 0 \Leftrightarrow 3x - 4 < 1 \Leftrightarrow x < \frac{5}{3}. \text{ Donc, } S =] \frac{4}{3}; \frac{5}{3} [.$$

2. L'inéquation est définie sur $] -\infty; 3[$.

$$\ln(-x + 3) \geq 1 \Leftrightarrow -x + 3 \geq e \Leftrightarrow x \leq -e + 3. \text{ Donc, } S =] -\infty; -e + 3].$$

3. L'inéquation est définie sur $]0; 1[$.

$$\ln(-x + 1) \leq \ln(x) \Leftrightarrow -x + 1 \leq x \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc, } S = [\frac{1}{2}; 1[.$$

$$4. \begin{cases} 3+2x > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x > 3 \end{cases}.$$

L'inéquation est définie sur $]3; +\infty[$.

$$\ln(3+2x) < \ln(x-3) \Leftrightarrow 3+2x < x-3 \Leftrightarrow x < -6.$$

Donc $S = \emptyset$.

Exercice 22.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en posant $X = \ln(x)$ ou $X = e^x$.

1. $(\ln(x))^2 - 2\ln(x) - 3 = 0$.

2. $4(\ln(x))^2 - \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 3 = 0$.

3. $4e^{2x} + 7e^x - 2 = 0$.

équations

Exercice 22.

1. L'équation est définie sur $]0; +\infty[$. En posant $X = \ln(x)$, on a $X \in]-\infty; +\infty[$ et l'équation devient : $X^2 - 2X - 3 = 0$. $\Delta = 16 > 0$, $X_1 = 3$ et $X_2 = -1$ ($\ln(x))^2 - 2(\ln(x)) - 3 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 3$ ou $\ln(x) = -1$

$$\Leftrightarrow x = e^3 \text{ ou } x = e^{-1}.$$

Donc $S = \{e^{-1}; e^3\}$.

2. L'équation est définie sur $]0; +\infty[$.

$$4(\ln(x))^2 - \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 3 = 4(\ln(x))^2 + \ln(x) - 3.$$

En posant $X = \ln(x)$, on a $X \in]-\infty; +\infty[$ et l'équation devient :

$$4X^2 + X - 3 = 0. \Delta = 49 > 0, X_1 = -1 \text{ et } X_2 = \frac{3}{4}.$$

$$4(\ln(x))^2 - \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) - 3 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \text{ ou } \ln(x) = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-1} \text{ ou } x = e^{\frac{3}{4}}.$$

Donc $S = \{e^{-1}; e^{\frac{3}{4}}\}$.

3. L'équation est définie sur $] -\infty; +\infty[$. En posant $X = e^x$, on a $X \in]0; +\infty[$ et l'équation devient :

$$4X^2 + 7X - 2 = 0. \Delta = 81 > 0, X_1 = \frac{1}{4} \text{ et } X_2 = -2.$$

Or $e^x > 0$ pour tout $x \in]-\infty; +\infty[$. Donc $S = \{-\ln(4)\}$.

Exercice 23.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\ln(-x) = \ln(x^2 - 1)$.

2. $\ln(2 - e^x) - \ln(2e^x - 1) = 0$.

3. $\ln(4) + \ln(x - 1) = 2\ln(x)$.

équations

Exercice 23.

1. $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ -x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 1 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ x < 0 \end{cases}$

On en déduit que l'équation est définie sur l'intervalle $] -\infty; -1[$.

$$\ln(-x) = \ln(x^2 - 1) \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0.$$

$$\Delta = 5, x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}. \text{ Donc } S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

$$2. \begin{cases} 2 - e^x > 0 \\ 2e^x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \ln(2) \\ x > -\ln(2) \end{cases} \text{ On en déduit que l'équation est définie sur l'intervalle }]-\ln(2); \ln(2)[.$$

$$\ln(2 - e^x) - \ln(2e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow 2 - e^x = 2e^x - 1 \Leftrightarrow e^x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0.$$

Donc $S = \{0\}$.

$$3. \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 0 \end{cases}. \text{ On en déduit que l'équation est définie sur l'intervalle }]1; +\infty[.$$

$$\ln(4) + \ln(x - 1) = 2\ln(x) \Leftrightarrow \ln(4(x - 1)) = \ln(x^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Donc $S = \{2\}$.

Exercice 24.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

- $(2x^2 + 3x - 6) \ln(1 - x) = 0$.
- $\ln(e^x - 1) + \ln(e^x + 1) = 1 + \ln(2)$.
- $\ln(x + 1) - \ln(x) = 2 \ln(3)$.

équations

Exercice 24.

- $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$. L'équation est donc définie sur l'intervalle $] -\infty; 1[$.

$$(2x^2 + 3x - 6) \ln(1 - x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 6 = 0 \text{ ou } \ln(1 - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-3 - \sqrt{57}}{4}$$

$$\text{ou } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{57}}{4} \text{ ou } x = 0. \text{ Donc } S = \left\{ \frac{-3 - \sqrt{57}}{4}; 0 \right\}.$$

- $e^x + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$. L'équation est donc définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

$$\ln(e^x - 1) + \ln(e^x + 1) = 1 + \ln(2) \Leftrightarrow \ln((e^x - 1)(e^x + 1)) = \ln(2e)$$

$$\Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x + 1) = 2e \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 2e \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2e + 1)}{2}.$$

$$\text{Donc } S = \left\{ \frac{\ln(2e + 1)}{2} \right\}.$$

- $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 0 \end{cases}$. On en déduit que l'équation est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

$$\ln(x + 1) - \ln(x) = 2 \ln(3) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x + 1}{x}\right) = \ln(3^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x + 1}{x} = 9 \Leftrightarrow x + 1 = 9x \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}. \text{ Donc } S = \left\{ \frac{1}{8} \right\}.$$

Exercice 25.

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{2x + 1}.$$

- Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

2. a. Vérifier que, pour tout réel $x > 0$:

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \left(\frac{1}{2 + \frac{1}{x}} \right).$$

- b. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Interpréter graphiquement les résultats précédents.

limites

Exercice 25.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 2x + 1 = 1$, par quotient $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

2. a. $\frac{\ln(x)}{x} \left(\frac{1}{2 + \frac{1}{x}} \right) = \frac{\ln(x)}{x \left(2 + \frac{1}{x} \right)} = \frac{\ln(x)}{2x + 1} = f(x).$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2 + \frac{1}{x}} \right) = \frac{1}{2}$, par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

3. La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

Exercice 26.

Pour chacune des fonctions f suivantes définies sur l'ensemble E , étudier les limites de f aux bornes de E , le sens de variation de f sur E et dresser son tableau de variation sur E .

- $f(x) = x \ln(x)$ et $E =]0; +\infty[$.
- $f(x) = x^2 \ln(x)$ et $E =]0; +\infty[$.
- $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ et $E =]0; +\infty[$.

limites, variations

Exercice 26.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = +\infty$.

$f'(x) = \ln(x) + 1$. Or, $\ln(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$. La fonction f est décroissante sur $]0; \frac{1}{e}]$ et croissante sur $[\frac{1}{e}; +\infty[$.

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln(x) = +\infty$.

$$f'(x) = 2x \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln(x) + x = x(2 \ln(x) + 1).$$

Or, $x > 0$ donc $f'(x)$ a le signe de $2\ln(x) + 1$:

$2\ln(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{\sqrt{e}}$. On en déduit le tableau de signes de $f'(x)$ et le tableau de variation de f .

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$-\frac{1}{2e}$	$+\infty$

3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$, par produit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty$

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}.$$

Pour $x > 0$, $x^3 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - 2\ln(x)$. Pour $x > 0$,

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < e^{0,5}$$

et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{0,5}$. Ainsi f est strictement croissante sur $]0; e^{0,5}]$ et f est strictement décroissante sur $[e^{0,5}; +\infty[$.

x	0	$e^{0,5}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{2e}$	0

Exercice 27.

Pour chacune des fonctions f suivantes définies sur l'ensemble E , étudier les limites de f aux bornes de E , le sens de variation de f sur E et dresser son tableau de variation sur E .

1. $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ et $E =]0; 1[\cup]1; +\infty[$.
2. $f(x) = (\ln(x))^2 - \ln(x) - 2$ et $E =]0; +\infty[$.

limites, variations

Exercice 27.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$, par quotient $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x)} = 0$.
 $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = 0$, et pour $x < 1$, $\ln(x) < 0$ donc
 $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{\ln(x)} = -\infty$, alors par produit $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x}{\ln(x)} = -\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = 0$, et pour $x > 1$, $\ln(x) > 0$ donc
 $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{\ln(x)} = +\infty$, alors par produit $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et pour $x > 1$, $\ln(x) > 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$.

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}. (\ln(x))^2 > 0 \text{ et } \ln(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow x > e.$$

La fonction f est strictement décroissante sur $]0 ; 1[$ et sur $]1 ; e[$ et strictement croissante sur $[e ; +\infty[$.

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		-	- 0 +	
$f(x)$	0	$+\infty$	e	$+\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x))^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -\ln(x) = +\infty$, par somme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

$$f(x) = (\ln(x))^2 \left(1 - \frac{1}{\ln(x)} - \frac{2}{(\ln(x))^2} \right).$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x))^2 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{\ln(x)} - \frac{2}{(\ln(x))^2} = 1$ par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$f'(x) = \frac{2}{x} \ln(x) - \frac{1}{x} = \frac{2\ln(x) - 1}{x}.$$

Or $x > 0$ et $2\ln(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{e}$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0 ; \sqrt{e}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{e} ; +\infty[$.

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	0	$-\frac{9}{4}$	$+\infty$

Exercice 28.

Les fonctions suivantes sont définies sur $]0 ; +\infty[$. Déterminer leurs limites en 0 et en $+\infty$.

1. $f : x \mapsto x - 4\ln(x)$
2. $g : x \mapsto (3 - x)\ln(x)$
3. $h : x \mapsto \frac{\ln(x) + 1}{2x + 3}$
4. $k : x \mapsto \frac{\ln(x)}{e^x}$

limites

Exercice 28.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -4\ln(x) = +\infty$.
Par somme, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

$$f(x) = x \left(1 - 4 \frac{\ln(x)}{x} \right).$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 4 \frac{\ln(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, donc par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} 3 - x = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ donc par produit, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) + 1 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 2x + 3 = 3$ et donc par quotient, $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty$.

$$h(x) = \frac{\frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x}}{2 + \frac{3}{x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{3}{x} = 2 \text{ donc par quotient, } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0.$$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ donc par quotient, $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = -\infty$.

$$\frac{\ln(x)}{e^x} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x}{e^x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ donc par inverse, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

$$\text{De plus, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

$$\text{Par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x}{e^x} = 0. \text{ Donc, } \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 0.$$

Exercice 29.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] -2; 2[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Justifier que f est définie sur $] -2; 2[$.
2. Montrer que la fonction f est une fonction impaire. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes verticales que l'on précisera.
4. Étudier le sens de variation de la fonction f , puis dresser son tableau de variation.

ensemble de définition, limites, variations

Exercice 29.

1. Le réel $f(x)$ existe si et seulement si $\frac{2+x}{2-x}$ est strictement positif, or le quotient $\frac{2-x}{2+x}$ a le signe du trinôme $(2-x)(2+x)$ pour $x \neq -2$. Il est donc du signe de $-a = 1$, soit strictement positif entre les racines -2 et 2 . La fonction f est définie sur $] -2; 2[$.

2. Soit $x \in] -2; 2[$, alors $-x \in] -2; 2[$, et

$$f(-x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = \ln\left(\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{-1}\right) = -\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = -f(x).$$

La fonction f est donc impaire. Donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

3. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2+x}{2-x} = 0$, et $\lim_{X \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty$.

Par composée $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$.

La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2+x}{2-x} = +\infty, \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty.$$

Par composée $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$.

La droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$.

4. $f'(x) = \frac{(2-x) + (2+x)}{(2-x)^2} \times \frac{2-x}{2+x} = \frac{4}{(2-x)(2+x)} > 0$ sur $] -2; 2[$. On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $] -2; 2[$.

x	-2	2
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Exercice 30.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

- $\ln(x) = -5$.
- $-6\ln(x) + 3 = 0$.
- $\ln(x)(2\ln(x) - 7) = 0$.
- $(\ln(x))^2 - \ln(x) = 0$.
- $(\ln(x))^3 - 2(\ln(x))^2 = 0$.

équations

Exercice 30.

- $\ln(x) = -5 \Leftrightarrow x = e^{-5}$. Ainsi, $S = \{e^{-5}\}$.
- $-6\ln(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$. Ainsi, $S = \{\sqrt{e}\}$.
- $\ln(x)(2\ln(x) - 7) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0$ ou $2\ln(x) - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e^{\frac{7}{2}}$. Ainsi, $S = \{1; e^{\frac{7}{2}}\}$.
- $(\ln(x))^2 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x)(\ln(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0$ ou $\ln(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e$. Ainsi, $S = \{1; e\}$.
- $(\ln(x))^3 - 2(\ln(x))^2 = 0 \Leftrightarrow (\ln(x))^2(\ln(x) - 2) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0$ ou $\ln(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e^2$. Ainsi, $S = \{1; e^2\}$.

Exercice 31.

Soit f la fonction définie sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(2x - 1) - x + 1.$$

- Déterminer la limite de $f(x)$ en $\frac{1}{2}$.
- Montrer que, pour tout réel $x > \frac{1}{2}$,

$$f(x) = \ln(x) - x + 1 + \ln\left(2 - \frac{1}{x}\right).$$

En déduire la limite de $f(x)$ en $+\infty$.

- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions distinctes α et β ($\alpha < \beta$).
- Donner la valeur exacte de α et un encadrement de β d'amplitude 10^{-2} .

limites, variations, TVI

Exercice 31.

- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} 2x - 1 = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty$.
Par composée, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = -\infty$.

$$2. \ln(x) + \ln\left(2 - \frac{1}{x}\right) - x + 1 = \ln\left(x\left(2 - \frac{1}{x}\right)\right) - x + 1$$

$$= \ln(2x - 1) - x + 1 = f(x).$$

$$f(x) = x\left(\frac{\ln(x)}{x} - 1\right) + 1 + \ln\left(2 - \frac{1}{x}\right).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} - 1\right) = -1.$$

$$\text{Par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x\left(\frac{\ln(x)}{x} - 1\right) = -\infty.$$

$$\text{De plus, } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(2 - \frac{1}{x}\right) = \ln(2).$$

$$\text{Par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

$$3. f'(x) = \frac{2}{2x-1} - 1 = \frac{-2x+3}{2x-1}. \text{ On a } -2x+3 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}.$$

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$\ln(2) - \frac{1}{2}$	$-\infty$

Sur l'intervalle $]\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$, la fonction f est continue et strictement croissante. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = -\infty$ et $f\left(\frac{3}{2}\right) =$

$$\ln(2) - \frac{1}{2} > 0, \text{ donc}$$

$0 \in]-\infty; \ln(2) - \frac{1}{2}]$, alors d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α appartenant à l'intervalle $]\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Sur l'intervalle $[\frac{3}{2}; +\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante. $f\left(\frac{3}{2}\right) = \ln(2) - \frac{1}{2} > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

donc $0 \in]-\infty; \ln(2) - \frac{1}{2}]$, alors d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel β appartenant à l'intervalle...

A FINIR

Exercice 32. _____

Déterminer la limite, lorsque x tend vers a , des fonctions définies par les expressions suivantes.

$$1. f(x) = \ln(e^x - x) \text{ et } a = +\infty.$$

$$2. g(x) = \frac{\ln(\sqrt{x} - 3)}{x} \text{ et } a = +\infty.$$

$$3. h(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \text{ et } a = 0.$$

$$4. l(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x} \text{ et } a = 0.$$

limites

Exercice 32. _____

1. $f(x) = \ln\left(x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)\right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - 1 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

Par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty$. De plus, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$. Donc, par composée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. $g(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\ln(x-3)}{x} = \frac{1}{2} \times \frac{\ln(x-3)}{x-3} \times \frac{x-3}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x-3 = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0 \text{ donc, par composée,}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-3)}{x-3} = 0.$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x} = 1$, donc par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} = \ln'(1)$. Or, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, donc $\ln'(1) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1$.

4. $l(x) = 2 \times \frac{\ln(1+2x)}{2x}$, or $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 0$

donc par composée $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} l(x) = 2$.

Exercice 33.

On considère la fonction f , définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3x - 3x \ln(x).$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé et $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

— Quelle est la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$?

dérivées

Exercice 33.

La fonction f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 3 - 3 \ln(x) - 3x \times \frac{1}{x} = -3 \ln(x)$ et $f''(x) = -\frac{3}{x}$.

Pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, $f''(x) < 0$, f' est donc strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. On en déduit que f est concave sur $]0; +\infty[$. La courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de toutes ses tangentes sur $]0; +\infty[$, en particulier elle est en dessous de la tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse 1.

Exercice 34.

Soient f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1.
 - a. Calculer la limite de f en 0. En donner une interprétation graphique.
 - b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. En donner une interprétation graphique.
2.
 - a. Montrer que, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln(x)}{x^3}.$$

- b. En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.
3. a. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.
- b. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 34.

1. a. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \ln(x)) = -\infty$
 et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, par produit $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, $x > 0$.

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f .

- b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc, par somme,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln(x)}{x^2} = 0.$$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.

2. a. Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x(1 + \ln(x))}{x^4} = \frac{-x - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{-1 - 2 \ln(x)}{x^3}.$$

- b. $x^2 > 0$ sur $]0; +\infty[$, donc $f'(x)$ est du signe de $-1 - 2 \ln(x)$ sur $]0; +\infty[$. Or, $-1 - 2 \ln(x) > 0 \iff \ln(x) < -\frac{1}{2} \iff x < e^{-\frac{1}{2}}$ et

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{e}{2}.$$

On en déduit le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$.

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{e}{2}$	0

3. a. $f(x) = 0 \iff 1 + \ln(x) = 0 \iff \ln(x) = -1 \iff x = e^{-1}$.
 La courbe $\mathcal{C}$ coupe donc l'axe des abscisses en un unique point de coordonnées $(e^{-1}; 0)$.
- b. D'après le tableau de variation de la fonction f et la question précédente, on en déduit que $f(x) < 0$ sur l'intervalle $]0; e^{-1}[$ et $f(x) > 0$ sur l'intervalle $]e^{-1}; +\infty[$.

Exercice 35.

Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Soit g la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 1 + \ln(x).$$

Montrer que la fonction g est positive sur $[1; +\infty[$.

2. a. Montrer que, pour tout $x \in [1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}.$$

- b. En déduire le sens de variation de f sur $[1; +\infty[$.

3. On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x$. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.
4. Pour tout entier naturel $k \geq 2$, on note M_k et N_k les points d'abscisses k de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$.
- a. Déterminer la limite de $M_k N_k$ lorsque k tend vers $+\infty$.
- b. **ALGO** — Écrire un algorithme en langage naturel permettant de déterminer le plus petit entier $k_0 \geq 2$ tel que la distance $M_{k_0} N_{k_0}$ soit inférieure ou égale à 10^{-2} .

variations

Exercice 35.

1. Pour tout $x \geq 1$, $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ et on a $g'(x) > 0$ pour tout $x \geq 1$, la fonction g est donc strictement croissante sur $[1; +\infty[$. De plus $g(1) = 0$ donc la fonction g est positive sur $[1; +\infty[$.

2. a. Pour tout $x \geq 1$,

$$f'(x) = 1 - \left(\frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} \right) = 1 - \left(\frac{1 - \ln(x)}{x^2} \right) = \frac{x^2 - 1 + \ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

- b. $x^2 > 0$ sur $[1; +\infty[$, donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $[1; +\infty[$. Or, d'après la question 1. $g(x) \geq 0$ sur $[1; +\infty[$, donc $f'(x) \geq 0$ sur $[1; +\infty[$ et f est croissante sur $[1; +\infty[$.

3. Pour tout $x \geq 1$, $f(x) - x = -\frac{\ln(x)}{x}$ et $-\frac{\ln(x)}{x} < 0$ sur $[1; +\infty[$. La courbe $\mathcal{C}$ est donc située en dessous de la droite $\mathcal{D}$ sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

4. a. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $M_n N_n = |f(n) - n| = \frac{\ln(n)}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. Lorsque n tend vers $+\infty$ la distance $M_n N_n$ tend donc vers 0.

- b. K <- 2

Tant que $\ln(K)/K > 0,01$

K <- K + 1

Afficher K

Exercice 36.

Étude d'une fonction

Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x + 2 - x \ln(x).$$

1. Étudier les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de g sur $]0; +\infty[$ et dresser son tableau de variation.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0; +\infty[$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B. Étude d'une fonction f

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{2+x}$$

et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(2+x)^2}.$$

2. En utilisant l'égalité $g(\alpha) = 0$, prouver que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$.
3. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Dresser le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$.
5. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

limites, variations, TVI

Exercice 36.

Partie A :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x + 2 = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$. Par différence, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$.

$$g(x) = x \left(1 + \frac{2}{x} - \ln(x) \right).$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \ln(x) \right) = -\infty$. Par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

2. Pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = -\ln(x)$. $-\ln(x) > 0 \iff \ln(x) < 0 \iff x < 1$.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	2	3	$-\infty$

3. Sur l'intervalle $]0; 1]$, g est strictement croissante $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle. Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, la fonction g est continue et strictement décroissante. $g(1) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, $0 \in]-\infty; 3]$, donc d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α appartenant à l'intervalle $[1; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

Partie B :

1. Pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(2+x) - \ln(x)}{(2+x)^2} = \frac{2+x-x\ln(x)}{x(2+x)^2} = \frac{g(x)}{x(2+x)^2}.$$

2. $g(\alpha) = 0 \iff \alpha + 2 - \alpha \ln(\alpha) = 0 \iff \alpha + 2 = \alpha \ln(\alpha)$, donc

$$f(\alpha) = \frac{\ln(\alpha)}{2 + \alpha} = \frac{\ln(\alpha)}{\alpha \ln(\alpha)} = \frac{1}{\alpha}.$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} 2 + x = 2$. Par quotient, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x}{2 + x}.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 + x} = 1$. Par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

4.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{\alpha}$	0

5. À la calculatrice, on trouve $4,31 \leq \alpha \leq 4,32$.