

EXERCICES

Primitives

Mots clés : primitives simples, formes composées, coefficient multiplicateur, dériver, détermination de la constante, décomposition en éléments simples, équations différentielles, déterminer a et b

Exercice 1.

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 7$
2. $f(x) = x^3 + x - 12$
3. $f(x) = x^6 + 3x^5 - x^4$
4. $f(x) = 0,1x^4 + \frac{x^2}{10} - \frac{x}{100}$

primitives simples

Exercice 1.

1. $F(x) = (2x + 1)^5$
2. $F(x) = \sqrt{3x + 1}$
3. $F(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$
4. $F(x) = \ln(2x - 6)$

Exercice 2.

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

1. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$
2. $f(x) = \frac{5}{x^4} - \frac{4}{x^5}$
3. $f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{x}{2}$
4. $f(x) = \frac{1}{3x^2} - \frac{3x^2}{2} + \frac{2}{3}$

primitives simples

Exercice 2.

1. $F(x) = \ln(x) - \frac{1}{2x^2}$
2. $F(x) = -\frac{5}{3x^3} + \frac{1}{x^4}$
3. $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x) + \frac{x^2}{4}$
4. $F(x) = -\frac{1}{3x} - \frac{x^3}{2} + \frac{2}{3}x$

Exercice 3.

Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est une solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.

1. $f : x \mapsto 5x^2 - 2x - 5$; $(E) : y' = 10x - 2$
2. $f : x \mapsto 1 - e^{-2x+1}$; $(E) : y' = 2e^{-2x+1}$
3. $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$; $(E) : y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

Exercice 3.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 10x - 2$, donc f est solution de (E).
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2e^{-2x+1}$, donc f est solution de (E).
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, donc f est solution de (E).

Exercice 4.

Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est une solution de l'équation (E) sur l'intervalle I .

1. $f : x \mapsto \frac{(x-2)^3}{3}$; (E) : $y' = (x-2)^2$ et $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-x^2+1}$; (E) : $y' = xe^{-x^2+1}$ et $I = \mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto -\frac{1}{3(3x+6)}$; (E) : $y' = \frac{1}{(3x+6)^2}$ et $I =]-3; +\infty[$.
4. $f : x \mapsto \frac{1}{2}\ln(2x-1)$; (E) : $y' = \frac{1}{2x-1}$ et $I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$.

équations différentielles, dériver

Exercice 4.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{3(x-2)^2}{3} = (x-2)^2$, donc f est solution de (E).
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\frac{1}{2} \times (-2x)e^{-x^2+1} = xe^{-x^2+1}$, donc f est solution de (E).
3. f est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{9}{9(3x+6)^2} = \frac{1}{(3x+6)^2}$, donc f est solution de (E).
4. f est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{2x-1} = \frac{1}{2x-1}$, donc f est solution de (E).

Exercice 5.

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I .

1. $f(x) = 10(2x+1)^4$ et $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ et $I = \left] -\frac{1}{3}; +\infty \right[$.
3. $f(x) = \frac{2}{(x-2)^3}$ et $I =]2; +\infty[$.
4. $f(x) = \frac{2}{2x-6}$ et $I =]3; +\infty[$.

formes composées

Exercice 5.

1. $F(x) = (2x+1)^5$
2. $F(x) = \sqrt{3x+1}$
3. $F(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$
4. $F(x) = \ln(2x-6)$

Exercice 6.

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 3e^{3x+1}$
2. $f(x) = 2xe^{x^2}$
3. $f(x) = 6e^x(e^x + 2)^5$
4. $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 3}$

formes composées

Exercice 6.

1. Pour tout $x \in]1; +\infty[$,

$$x + 4 + \frac{2}{x+1} = \frac{(x+4)(x+1) + 2}{x+1} = \frac{x^2 + 5x + 6}{x+1} = f(x).$$

2. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 2\ln(x+1).$

Exercice 7.

On considère les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-x^2 + 2x + 1)e^{-x} \quad \text{et} \quad F(x) = (x^2 - 1)e^{-x}.$$

1. Vérifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire la primitive G de f telle que $G(0) = 5$.

dérivée, détermination de la constante

Exercice 7.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 10x - 2$, donc f est solution de (E).
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2e^{-2x+1}$, donc f est solution de (E).
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, donc f est solution de (E).

Exercice 8.

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - e^x.$$

1. Donner une primitive de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
2. En déduire toutes les primitives de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
3. Déterminer la primitive F de la fonction f telle que $F(1) = 0$.

primitives simples, détermination de la constante

Exercice 8.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{3(x-2)^2}{3} = (x-2)^2$, donc f est solution de (E).
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\frac{1}{2} \times (-2x)e^{-x^2+1} = xe^{-x^2+1}$, donc f est solution de (E).
3. f est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{9}{9(3x+6)^2} = \frac{1}{(3x+6)^2}$, donc f est solution de (E).
4. f est dérivable sur I . et $f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{2x-1} = \frac{1}{2x-1}$, donc f est solution de (E).

Exercice 9.

Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive F de f sur l'intervalle I dont on donne une condition initiale.

1. $f(x) = x^3 - 2x^2$; $I = \mathbb{R}$; $F(0) = 2$.
2. $f(x) = \cos(x)$; $I = \mathbb{R}$; $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2$; $I =]0; +\infty[$; $F(1) = 1$.
4. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$; $I =]0; +\infty[$; $F(1) = 2$.
5. $f(x) = e^{2x+1}$; $I = \mathbb{R}$; $F(0) = 0$.

primitives simples, détermination de la constante

Exercice 9.

1. $f(x) = 3 \times \frac{2x+1}{x^2+x+1}$, or $x^2+x+1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $F(x) = 3 \ln(x^2+x+1) + C$, où C est une constante réelle.
2. $f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}$, donc $F(x) = \frac{1}{3} \sqrt{3x^2+1} + C$, où C est une constante réelle.
3. $f(x) = -(-2xe^{-x^2})$, donc $F(x) = -e^{-x^2} + C$, où C est une constante réelle.

Exercice 10.

Déterminer dans chaque cas l'ensemble des primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = \frac{6x+3}{x^2+x+1}$
2. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}$
3. $f(x) = 2xe^{-x^2}$

formes composées, coefficient multiplicateur

Exercice 10.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et $F(x) = -\frac{8}{5}e^{-\frac{5x}{4}}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f est continue sur $]1; +\infty[$ et $f(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{-2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$, ainsi $F(x) = -\frac{1}{2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$.
3. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(x) = -\frac{1}{6} \times \frac{-3 \times (2e^{2x} + 2x)}{(e^{2x} + x^2)^4}$, ainsi $F(x) = -\frac{1}{6(e^{2x} + x^2)^3}$.
4. La fonction f est continue sur $[0; +\infty[$ et $f(x) = 2 \times \frac{e^x + 1}{2\sqrt{e^x + x}}$, ainsi $F(x) = 2\sqrt{e^x + x}$.

Exercice 11.

Justifier dans chaque cas que la fonction f admet des primitives sur l'intervalle I et déterminer une primitive de f sur I .

1. $f(x) = 2e^{\frac{-5x}{4}}$; $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$; $I =]1; +\infty[$
3. $f(x) = \frac{e^{2x} + x}{(e^{2x} + x^2)^4}$; $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \frac{e^x + 1}{\sqrt{e^x + x}}$; $I = [0; +\infty[$

Exercice 11.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et $F(x) = -\frac{8}{5}e^{-\frac{5x}{4}}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f est continue sur $]1; +\infty[$ et $f(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{-2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$, ainsi $F(x) = -\frac{1}{2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$.
3. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et

$$f(x) = -\frac{1}{6} \times \frac{-3 \times (2e^{2x} + 2x)}{(e^{2x} + x^2)^4}, \text{ ainsi } F(x) = -\frac{1}{6(e^{2x} + x^2)^3}.$$
4. La fonction f est continue sur $[0; +\infty[$ et $f(x) = 2 \times \frac{e^x + 1}{2\sqrt{e^x + x}}$, ainsi $F(x) = 2\sqrt{e^x + x}$.

Exercice 12.

Déterminer dans chaque cas, sur l'intervalle I donné, la primitive F de la fonction f dont on donne une condition initiale.

1. $I =]0; +\infty[$; $f(x) = \frac{1}{x^3}$; $F(1) = 1$.
2. $I = \mathbb{R}$; $f(x) = 3 \sin(2x)$; $F(0) = 2$.
3. $I = \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{3e^x}{e^x + 3}$; $F(0) = 0$.

formes composées, coefficient multiplicateur, détermination de la constante

Exercice 12.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitives sur cet intervalle.
2. $F'(x) = ae^{2x} + 2(ax + b)e^{2x} = (2ax + 2b + a)e^{2x}$.

Par identification, F est une primitive de

$$f \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 3 \\ 2b + a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ 2b + \frac{3}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{5}{4} \end{cases}.$$

3. L'ensemble des primitives de la fonction f sont les fonctions F définies par $F(x) = \left(\frac{3}{2}x - \frac{5}{4}\right)e^{2x} + C$, où C est une constante réelle.

Exercice 13.

QCM

Pour chaque question, donner la seule réponse exacte parmi les trois proposées. Justifier.

1. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto (x+1)e^{-x}$ est :
 - a. $F: x \mapsto xe^{-x}$
 - b. $F: x \mapsto (-x-2)e^{-x}$
 - c. $F: x \mapsto -\left(\frac{x^2}{2} + x\right)e^{-x}$
2. Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 2e^x$ sont les fonctions :
 - a. $F: x \mapsto 2(e^x + 1) + C$, où $C \in \mathbb{R}$.
 - b. $F: x \mapsto 2xe^x + C$, où $C \in \mathbb{R}$.
 - c. $F: x \mapsto e^{2x} + C$, où $C \in \mathbb{R}$.
3. L'unique primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 est :
 - a. $F: x \mapsto -\frac{1}{x^2} + 1$

- b. $F : x \mapsto \ln(x)$
 c. $F : x \mapsto (x-1)\ln(x)$

dériver, primitives simples, détermination de la constante

Exercice 13.

- $((-x-2)e^{-x})' = -e^{-x} - (-x-2)e^{-x} = (x+1)e^{-x}$: réponse b.
- $(2(e^x+1)+C)' = 2e^x$: réponse a.
- $\ln(1) = 0$ et $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$: réponse b.

Exercice 14.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] -1; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}.$$

Clara affirme que la fonction F , définie par :

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2-1)$$

est une primitive de f sur l'intervalle $] -1; 1[$. A-t-elle raison ? Expliquer.

formes composées

Exercice 14.

1.

$$\frac{a}{4-x} + \frac{b}{4+x} = \frac{a(4+x) + b(4-x)}{(4-x)(4+x)} = \frac{(a-b)x + 4(a+b)}{16-x^2}.$$

$$\text{Or, } f(x) = \frac{a}{4-x} + \frac{b}{4+x} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ 4(a+b)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ b=\frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{8} \\ b=\frac{1}{8} \end{cases}.$$

2. L'ensemble des primitives de la fonction f sont les fonctions F définies par $F(x) = -\frac{1}{8} \ln(4-x) + \frac{1}{8} \ln(4+x) + C$, où C est une constante réelle.

3. $F(0) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{8} \ln(4) + \frac{1}{8} \ln(4) + C = 0 \Leftrightarrow C = 0$,
 donc $F(x) = -\frac{1}{8} \ln(4-x) + \frac{1}{8} \ln(4+x)$.

Exercice 15.

La fonction g , définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$, est solution de l'équation différentielle $y' = f$.

- Déterminer la fonction f .
- Écrire toutes les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- En déduire la fonction h telle que $h' = f$ et $h(0) = 0$.

dériver, détermination de la constante

Exercice 15.

- $f(x) = (g(x))' = \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$
- $F : x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1} + C$, où $C \in \mathbb{R}$.

$$3. \quad h(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^0}{e^0 + 1} + C = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc } h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{1}{2}.$$

Exercice 16.

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

On note F la primitive de f sur $[0; +\infty[$ qui s'annule en 0.

1. On considère la fonction g , définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = F(x) + \frac{1}{2}x.$$

Montrer que la fonction g est croissante sur $[0; +\infty[$.

2. Calculer $g(0)$ et en déduire que, pour tout réel strictement positif x , on a $g(x) \geq 0$.
 3. En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction F .

dérivée

Exercice 16.

1. $g'(x) = f(x) + \frac{1}{2}.$

Or, $f(x) + \frac{1}{2} > 0$ pour tout $x \in [0; +\infty[$, la fonction g est donc croissante sur $[0; +\infty[$.

2. $g(0) = F(0) + \frac{1}{2} \times 0 = 0$. La fonction g est croissante sur $[0; +\infty[$ et $g(0) = 0$, on en déduit que la fonction g est positive sur $[0; +\infty[$.

3. $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow F(x) - \frac{1}{2}x \geq 0 \Leftrightarrow F(x) \geq \frac{1}{2}x.$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x = +\infty$. D'après le théorème de comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

Exercice 17.

Déterminez une primitive de la fonction f proposée sur l'intervalle I donné :

1) $f(x) = x^2 - 5x + \frac{1}{x}$ sur $I =]0; +\infty[$

2) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ sur $I =]0; +\infty[$

3) $f(x) = \frac{7}{x} + \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$ sur $I =]0; +\infty[$

4) $f(x) = \frac{3}{3x-4}$ sur $I = \left] \frac{4}{3}; +\infty \right[$

5) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ sur $I =]-1; +\infty[$

6) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ sur $I =]-\infty; -1[$

7) $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$ sur $I =]2; +\infty[$

8) $f(x) = \frac{1}{3x-5}$ sur $I =]2; +\infty[$

9) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur $\mathbb{R}$

10) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ sur $I =]-1; 1[$

primitives simples, formes composées, coefficients multiplicateurs

Exercice 17.

- 1) $f(x) = x^2 - 5x + \frac{1}{x}$. f est continue sur $]0; +\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc ad-

met des primitives sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x \in]0; +\infty[$,
 puisque $x \in]0; +\infty[$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + \ln(|x|) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + \ln(x)$$

- 2) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$. f est continue sur $]0; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x \in]0; +\infty[$, puisque $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x} = x + 1 + \frac{1}{x}$, $\boxed{F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \ln(|x|) = \frac{x^2}{2} + x + \ln(x)}$ puisque $x \in]0; +\infty[$
- 3) $f(x) = \frac{7}{x} + \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$. f est continue sur $]0; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\boxed{F(x) = 7\ln(|x|) + 5 \times 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} = 7\ln(x) + 10\sqrt{x} - \frac{1}{x}}$, car $x \in]0; +\infty[$
- 4) $f(x) = \frac{3}{3x-4}$. f est continue sur $]\frac{4}{3}; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]\frac{4}{3}; +\infty[$, et puisque $f(x) = \frac{3}{3x-4} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = 3x-4 \Rightarrow u'(x) = 3$, $\boxed{F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|3x-4|) = \ln(3x-4)}$ car $x \in]\frac{4}{3}; +\infty[$
- 5) $f(x) = \frac{1}{x+1}$. f est continue sur $] -1; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $] -1; +\infty[$, et puisque $f(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = x+1 \Rightarrow u'(x) = 1$, $\boxed{F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|x+1|) = \ln(x+1)}$ car $x \in] -1; +\infty[$
- 6) Si $x \in] -\infty; -1[$, $\boxed{F(x) = \ln(|x+1|) = \ln(-(x+1)) = \ln(-x-1)}$
- 7) $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$. f est continue sur $]2; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]2; +\infty[$, et puisque $f(x) = \frac{2x}{x^2-4} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = x^2-4 \Rightarrow u'(x) = 2x$, $\boxed{F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|x^2-4|) = \ln(x^2-4)}$ car $x \in]2; +\infty[$
- 8) $f(x) = \frac{1}{3x-5}$ sur $[2; +\infty[$. f est continue sur $[2; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $[2; +\infty[$, et pour tout $x \in [2; +\infty[$, puisque $f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{3x-5} = \frac{1}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$, où $u(x) = 3x-5 \Rightarrow u'(x) = 3$, $\boxed{F(x) = \frac{1}{3} \ln(|3x-5|) = \frac{1}{3} \ln(3x-5)}$ car $x \in [2; +\infty[$
- 9) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur $\mathbb{R}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, (le discriminant du trinôme x^2+2x+2 est strictement négatif) donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, puisque $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x) = x^2+2x+2 \Rightarrow u'(x) = 2x+2$, $\boxed{F(x) = \frac{1}{2} \ln(|u(x)|) = \frac{1}{2} \ln(|x^2+2x+2|) = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+2)}$, puisque $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2+2x+2 > 0$
- 10) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ sur $] -1; 1[$. f est continue sur $] -1; 1[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $] -1; 1[$, et pour tout $x \in] -1; 1[$, puisque $f(x) = \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{2} \frac{u'(x)}{u(x)}$, où $u(x) = x^2-1 \Rightarrow u'(x) = 2x$, $\boxed{F(x) = \frac{1}{2} \ln(|u(x)|) = \frac{1}{2} \ln(|x^2-1|) = \frac{1}{2} \ln(1-x^2)}$ puisque $x \in] -1; 1[\Rightarrow 1-x^2 > 0$

Exercice 18.

Déterminez une primitive de la fonction f proposée sur l'intervalle I donné :

$$1) f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ sur } I = \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$$

$$3) f(x) = \frac{1}{x \ln x} \text{ sur }]1; +\infty[$$

$$2) f(x) = \frac{\ln x}{x} \text{ sur } I = [1; +\infty[$$

$$4) f(x) = \tan x \text{ sur } \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right]$$

formes composées

Exercice 18.

1) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$. f est définie et continue sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, et pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, puisque $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x) = \sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x$, $F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|\sin x|) = \ln(\sin x)$, puisque $x \in]0; \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \sin x > 0$.

2) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. f est définie et continue sur $[1; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $[1; +\infty[$, et pour tout $x \in [1; +\infty[$, puisque $f(x) = \frac{1}{x} \times \ln x = u'(x) \times u(x)$, ou $u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \frac{(u(x))^2}{2} = \frac{(\ln(x))^2}{2}$

3) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. f définie est continue sur $]1; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]1; +\infty[$, et pour tout $x \in]1; +\infty[$, puisque $f(x) = \frac{1/x}{\ln x} = \frac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|\ln(x)|) = \ln(\ln(x))$ car $x \in]1; +\infty[\Rightarrow \ln x > 0$

4) $f(x) = \tan x$. f définie est continue sur $\left] \frac{\pi}{2}; \pi \right]$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $\left] \frac{\pi}{2}; \pi \right]$, et pour tout $x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right]$, puisque $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x) = \cos x \Rightarrow u'(x) = -\sin x$, $F(x) = -\ln(|u(x)|) = -\ln|\cos x| = -\ln(-\cos x)$, puisque $x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right] \Rightarrow \cos x < 0$.

Exercice 19.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (3x - 1)e^{2x}$.

- Justifier que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer les réels a et b tels que la fonction $F : x \mapsto (ax + b)e^{2x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- En déduire l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

dériver, déterminer a et b

Exercice 19.

$$1. F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 7x$$

$$2. F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 12x$$

$$3. F(x) = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{5}x^5$$

$$4. F(x) = 0,02x^5 + \frac{1}{30}x^3 - \frac{x^2}{200}$$

Exercice 20.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 3x)e^{-x}$.

- Justifier que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

- Déterminer les réels a , b et c tels que la fonction $F : x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- En déduire l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $x = 1$.

dériver, déterminer a et b , détermination de la constante

Exercice 20.

- $F(x) = \ln(x) - \frac{1}{2x^2}$
- $F(x) = -\frac{5}{3x^3} + \frac{1}{x^4}$
- $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x) + \frac{x^2}{4}$
- $F(x) = -\frac{1}{3x} - \frac{x^3}{2} + \frac{2}{3}x$

Exercice 21.

Soit la fonction f définie sur $] -4; 4[$ par $f(x) = \frac{1}{16 - x^2}$.

- Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{a}{4 - x} + \frac{b}{4 + x}.$$

- Déterminer sur $] -4; 4[$ l'ensemble des primitives de la fonction f .
- Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 0.

déterminer a et b , formes composées, détermination de la constante

Exercice 21.

-

$$\frac{a}{4 - x} + \frac{b}{4 + x} = \frac{a(4 + x) + b(4 - x)}{(4 - x)(4 + x)} = \frac{(a - b)x + 4(a + b)}{16 - x^2}.$$

$$\text{Or, } f(x) = \frac{a}{4 - x} + \frac{b}{4 + x} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ 4(a + b) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ b = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ b = \frac{1}{8} \end{cases}.$$

- L'ensemble des primitives de la fonction f sont les fonctions F définies par $F(x) = -\frac{1}{8}\ln(4 - x) + \frac{1}{8}\ln(4 + x) + C$, où C est une constante réelle.
- $F(0) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{8}\ln(4) + \frac{1}{8}\ln(4) + C = 0 \Leftrightarrow C = 0$,
donc $F(x) = -\frac{1}{8}\ln(4 - x) + \frac{1}{8}\ln(4 + x)$.

Exercice 22.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x+2}{x(x-1)^2}$.

- Déterminer trois nombres réels a , b et c tels que :

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

- En déduire la primitive F de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$ telle que $F(2) = 10$.

Exercice 22.

1.

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} = \frac{a(x-1)^2 + bx(x-1) + cx}{x(x-1)^2} = \frac{(a+b)x^2 + (c-b-2a)x + a}{x(x-1)^2}.$$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} = f(x) \text{ si et seulement si}$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c-b-2a=1 \\ a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ c=3 \\ b=-2 \end{cases}.$$

2. D'après la question précédente, $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$.

Ainsi, les primitives de f sur $]1; +\infty[$ sont de la forme

$$F(x) = 2\ln(x) - 2\ln(x-1) - \frac{3}{x-1} + C \text{ où } C \text{ est une constante}$$

réelle.

$$\text{Or, } F(2) = 10 \Leftrightarrow 2\ln(2) - 2\ln(1) - 3 + C = 10$$

$$\Leftrightarrow C = 13 - 2\ln(2).$$

$$\text{Donc, } F(x) = 2\ln(x) - 2\ln(x-1) - \frac{3}{x-1} + 13 - 2\ln(2).$$

Exercice 23.

On considère la fonction f définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x+1}.$$

1. Vérifier que, pour tout $x \in] -1; +\infty[$:

$$f(x) = x + 4 + \frac{2}{x+1}.$$

2. En déduire une primitive de f sur $] -1; +\infty[$.

décomposition en éléments simples, formes composées

Exercice 23.

1) $f(x) = x^2 - 5x + \frac{1}{x}$. f est continue sur $]0; +\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc ad-

met des primitives sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x \in]0; +\infty[$, $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + \ln(|x|) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + \ln(x)$ puisque $x \in]0; +\infty[$

2) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$. f est continue sur $]0; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x \in]0; +\infty[$, puisque $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x} = x + 1 + \frac{1}{x}$, $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \ln(|x|) = \frac{x^2}{2} + x + \ln(x)$ puisque $x \in]0; +\infty[$

3) $f(x) = \frac{7}{x} + \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$. f est continue sur $]0; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x \in]0; +\infty[$, $F(x) = 7\ln(|x|) + 5 \times 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} = 7\ln(x) + 10\sqrt{x} - \frac{1}{x}$, car $x \in]0; +\infty[$

- 4) $f(x) = \frac{3}{3x-4}$. f est continue sur $] \frac{4}{3}; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $] \frac{4}{3}; +\infty[$, et puisque $f(x) = \frac{3}{3x-4} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = 3x-4 \Rightarrow u'(x) = 3$, $F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|3x-4|) = \ln(3x-4)$ car $x \in] \frac{4}{3}; +\infty[$
- 5) $f(x) = \frac{1}{x+1}$. f est continue sur $] -1; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $] -1; +\infty[$, et puisque $f(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = x+1 \Rightarrow u'(x) = 1$, $F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|x+1|) = \ln(x+1)$ car $x \in] -1; +\infty[$
- 6) Si $x \in] -\infty; -1[$, $F(x) = \ln(|x+1|) = \ln(-(x+1)) = \ln(-x-1)$
- 7) $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$. f est continue sur $]2; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]2; +\infty[$, et puisque $f(x) = \frac{2x}{x^2-4} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = x^2-4 \Rightarrow u'(x) = 2x$, $F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|x^2-4|) = \ln(x^2-4)$ car $x \in]2; +\infty[$
- 8) $f(x) = \frac{1}{3x-5}$ sur $[2; +\infty[$. f est continue sur $[2; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $[2; +\infty[$, et pour tout $x \in [2; +\infty[$, puisque $f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{3x-5} = \frac{1}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$, où $u(x) = 3x-5 \Rightarrow u'(x) = 3$, $F(x) = \frac{1}{3} \ln(|3x-5|) = \frac{1}{3} \ln(3x-5)$ car $x \in [2; +\infty[$
- 9) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur $\mathbb{R}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, (le discriminant du trinôme x^2+2x+2 est strictement négatif) donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, puisque $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x) = x^2+2x+2 \Rightarrow u'(x) = 2x+2$, $F(x) = \frac{1}{2} \ln(|u(x)|) = \frac{1}{2} \ln(|x^2+2x+2|) = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+2)$, puisque $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2+2x+2 > 0$
- 10) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ sur $] -1; 1[$. f est continue sur $] -1; 1[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $] -1; 1[$, et pour tout $x \in] -1; 1[$, puisque $f(x) = \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$, où $u(x) = x^2-1 \Rightarrow u'(x) = 2x$, $F(x) = \frac{1}{2} \ln(|u(x)|) = \frac{1}{2} \ln(|x^2-1|)$ puisque $x \in] -1; 1[\Rightarrow 1-x^2 < 0$

Exercice 24.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I =] -1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+2x-5}{2(x+1)^2}$.

- Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x appartenant à I , on ait $f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2}$.
- En déduire l'ensemble des primitives de f sur I .

déterminer a et b , formes composées

Exercice 24.

- 1) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$. f est définie et continue sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, et pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, puisque $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x) = \sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x$, $F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|\sin x|) = \ln(\sin x)$, puisque $x \in]0; \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \sin x > 0$.

- 2) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. f est définie et continue sur $]1; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]1; +\infty[$, et pour tout $x \in]1; +\infty[$, puisque $f(x) = \frac{1}{x} \times \ln x = u'(x) \times u(x)$, ou $u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$,
$$F(x) = \frac{(u(x))^2}{2} = \frac{(\ln(x))^2}{2}$$
- 3) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. f définie est continue sur $]1; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]1; +\infty[$, et pour tout $x \in]1; +\infty[$, puisque $f(x) = \frac{1/x}{\ln x} = \frac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$,
$$F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|\ln(x)|) = \ln(\ln(x))$$
 car $x \in]1; +\infty[\Rightarrow \ln x > 0$
- 4) $f(x) = \tan x$. f définie est continue sur $] \frac{\pi}{2}; \pi]$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $] \frac{\pi}{2}; \pi]$, et pour tout $x \in] \frac{\pi}{2}; \pi]$, puisque $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x) = \cos x \Rightarrow u'(x) = -\sin x$,
$$F(x) = -\ln(|u(x)|) = -\ln|\cos x| = -\ln(-\cos x)$$
, puisque $x \in] \frac{\pi}{2}; \pi] \Rightarrow \cos x < 0$.

Exercice 25.

On considère la fonction définie sur $I = [4; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 4}{x - 2}$

- 1) Trouver trois réels a, b , et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$
- 2) En déduire une primitive de f sur $[4; +\infty[$

déterminer a et b et c , formes composées

Exercice 25.

- 1) Pour tout $x \in [4; +\infty[$, $ax + b + \frac{c}{x - 2} = \frac{(ax + b)(x - 2) + c}{x - 2} = \frac{ax^2 + (b - 2a)x - 2b + c}{x - 2}$

$$\text{Ainsi } ax + b + \frac{c}{x - 2} = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - 2a = -3 \\ -2b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 + 4 = 1 \\ c = -4 + 2 = -2 \end{cases}.$$

$$\text{Pour tout } x \in [4; +\infty[, \quad f(x) = 2x + 1 + \frac{-2}{x - 2}$$

- 2) f est définie et continue sur $[4; +\infty[$ en tant que somme et quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $[4; +\infty[$. A partir de l'écriture $f(x) = 2x + 1 + \frac{-2}{x - 2}$, on déduit l'expression d'une primitive F de f sur $[4; +\infty[$:

$$F(x) = x^2 + x - 2 \ln(|x - 2|) = x^2 + x - 2 \ln(x - 2) \quad \text{car } x \in [4; +\infty[\Rightarrow x - 2 > 0$$